

Formas cuadráticas

1. Dadas las siguientes aplicaciones

$$\begin{aligned} \phi_1 : \mathbb{R}_4[x] \times \mathbb{R}_4[x] &\longrightarrow \mathbb{R}, & \phi_1(p, q) &= p(1)q(-1) + p(-1)q(1). \\ \phi_2 : M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}, & \phi_2(A, B) &= \text{traza}(AMB^t), \quad \text{donde } M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

se pide para $i = 1, 2$:

- (i) Probar que ϕ_i es una forma bilineal.
- (ii) Hallar la matriz de ϕ_i en la base canónica.
- (iii) Determinar el rango y los índices de inercia de la forma cuadrática Q_i asociada a ϕ_i .

2. Para las siguientes aplicaciones

$$\begin{aligned} Q_1 : M_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}, & Q_1(A) &= \text{Traza}(A^2) \\ Q_2 : M_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}, & Q_2(A) &= \det(A) \\ Q_3 : \mathbb{R}_2[x] &\longrightarrow \mathbb{R}, & Q_3(P) &= 2P(1)P'(1) \end{aligned}$$

se pide para $i = 1, 2, 3$:

- (i) Probar que Q_i es una forma cuadrática.
- (ii) Hallar la matriz de Q_i en la base canónica.
- (iii) Determinar el rango de Q_i .

3. Diagonalizar en una base ortonormal las siguientes formas cuadráticas:

$$\begin{aligned} Q_1(x, y) &= -2x^2 + y^2 + 4xy \\ Q_2(x, y, z) &= x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xz + 2yz \\ Q_3(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 - 4xz \\ Q_4(x, y, z) &= xy + yz + zx \end{aligned}$$

Encontrar la signatura de las anteriores formas cuadráticas y estudiar si son equivalentes.

4. Sea V un K -espacio vectorial, $\phi : V \times V \longrightarrow K$ una forma bilineal y $Q : V \longrightarrow K$ la forma cuadrática asociada a ϕ (es decir, $Q(u) = \phi(u, u)$ para $u \in V$). Demostrar que existe una única forma bilineal simétrica $\tilde{\phi} : V \times V \longrightarrow K$ tal que $Q(u) = \tilde{\phi}(u, u)$ para $u \in V$. A la forma bilineal $\tilde{\phi}$ se le conoce con el nombre de forma polar de Q .

5. Estudiar para que valores de $a, b \in \mathbb{R}$ las formas cuadráticas dadas por las siguientes matrices definen un producto escalar en \mathbb{R}^3 .

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} a & 2b & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Aplicar el método de completar cuadrados a las siguientes formas cuadráticas:

$$Q_1(x, y, z) = x^2 + 5y^2 - 2xy + 2xz$$

$$Q_2(x, y, z) = xy + 2xz$$

$$Q_3(x, y, z) = x^2 - z^2 - 2xy + xz$$

$$Q_4(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 5z^2 - 2xy + 6xz - 2yz$$

$$Q_5(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 6xy + 4xz$$

a) Encuentra las ecuaciones de la transformación de \mathbb{R}^3 que lleva cada forma cuadrática a su forma normal.

b) Encontrar la signatura de las anteriores formas cuadráticas y estudiar si son equivalentes.

7. Estudiar para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ las siguientes formas cuadráticas son definidas positivas o definidas negativas.

$$Q_1(x, y, z) = \alpha x^2 + y^2 + z^2 + 2\alpha xy + 2\alpha^2 xz + 2\alpha yz$$

$$Q_2(x, y, z) = \alpha x^2 + 2xy + \alpha y^2 + 2\alpha yz + 2\alpha z^2$$

$$Q_3(x, y, z) = x^2 + \alpha(\alpha - 1)y^2 + 2\alpha xy + 2xz + 4\alpha yz$$

8. Determinar los valores $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ para los que la forma cuadrática

$$\phi(x, y, z, t) = x^2 + 3y^2 - 4z^2 + \lambda t^2 + 2\mu xy$$

es degenerada. Calcular el rango y los índices de inercia de ϕ en función de λ, μ .

9. Sea V un espacio vectorial real y $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$, $Q' : V \rightarrow \mathbb{R}$ dos formas cuadráticas. Estudia si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica cada respuesta. (Recuerda que si la afirmación es verdadera hay que dar una demostración mientras que si la afirmación es falsa es suficiente con dar un contraejemplo)

- (i) Existe una única forma bilineal $\phi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $Q(u) = \phi(u, u)$ para $u \in V$.
- (ii) Existe una única forma bilineal simétrica $\phi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $Q(u) = \phi(u, u)$ para $u \in V$.
- (iii) Si todos los valores propios de la matriz de Q son positivos, entonces Q es definida positiva.
- (iv) Si Q y Q' son definidas positivas, entonces $Q + Q'$ también es definida positiva.
- (v) Si Q es indefinida, entonces Q es degenerada.