Espacios euclídeos y hermíticos III.
Proyecciones. Proyecciones ortogonales. Aplicaciones adjuntas.

1. Calcula la proyección sobre la recta V_1 dada por las ecuaciones $\{x+y+z=0, x-y=0\}$ en la dirección del plano vectorial V_2 generado por los vectores $w_1=(1,0,1)$ y $w_2=(1,1,0)$. Escribe la proyeccion sobre el plano V_2 en la dirección de la recta V_1.

2. En $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual, determina las ecuaciones de la proyección ortogonal sobre el subespacio vectorial generado por los vectores $(1,1,-1,0)$ y $(0,0,2,1)$.

3. Calcula la expresión analítica de la proyección ortogonal sobre la recta de $\mathbb{R}^3$ (con producto escalar usual) $l=\{x=y=z\}$. Calcula la proyección ortogonal sobre l del vector $(0,1,2)$.

4. Encuentra la expresión en coordendas de la proyección ortogonal (con respecto al producto hermítico usual) sobre la recta $l=\{x-(1+i)z=0,\ y=0\}$.

5. En $\mathbb{R}^3$ se considera el producto escalar con matriz en la base canónica

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calcula la proyección ortogonal del vector con coordenadas $(1,1,1)$ sobre el plano $\{y+z=0\}$.

6. Sea $V=M_2(\mathbb{C})$ y el producto hermítico $\langle A,B\rangle = \text{traza}(A\overline{B}^T)$. Encuentra la expresión en coordenadas de la proyección ortogonal sobre el plano generado por $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7. Calcula la aplicación adjunta de:

a) $h(x,y,z)=(x+y+z, x+2y+2z, x+2y+3z)$, con el producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$.

b) $h(x_1,x_2)=(x_1+x_2, x_1+2x_2)$ con el producto escalar de $\mathbb{R}^2$ dado por

$$\phi((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_1+(x_1+x_2)(y_1+y_2)$$

8. Considerando el producto escalar usual en $\mathbb{R}^3$ estudia si la aplicación A es autoadjunta cuando su matriz asociada en la base $\mathcal{B}=\{(1,1,0),(1,0,1),(1,2,0)\}$ es

$$\begin{pmatrix} -4 & -5 & -6 \\ 4 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

9. Diagonalizar en una base ortonormal cada una de las siguientes aplicaciones demostrando en primer lugar que son autoadjuntas:

a) $A:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $A(x,y)=(2x+y, 2y+x)$.

b) $A:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $A(x,y,z)=(y+z, x+z, x+y)$.

10. Sea $V = M_2(\mathbb{R})$ con el producto escalar $\langle A, B\rangle = \text{traza}(AB^T)$. Sea $f : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ la aplicación que a cada matriz A le asocia su traspuesta, i.e., $f(A) = A^T$. Demuestra que existe una base ortonormal en la que f es diagonalizable. Encuentra esa base.

11. Sea V un espacio vectorial euclídeo o hermítico de dimensión finita y sean $I_V, f, g : V \to V$ donde I_V es la identidad y f, g son dos endomorfismos cualesquiera. Demuestra que:

a) ${I_V}^* = I_V$;

b) $(f^*)^* = f$;

c) $(f+g)^* = f^* + g^*$;

d) $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$;

e) Si f es biyectiva, entonces $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$;

f) $(\text{Im } f)^\perp = \text{Ker}(f^*)$;

g) $(\text{Ker} f)^\perp = \text{Im}(f^*)$.

12. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita. Se dice que una aplicación lineal $P : V \to V$ es una proyección si $P^2 = P$. El subespacio Ker P es la *dirección de la proyección* y el subespacio Im P es el *subespacio sobre el que se proyecta*.

a) Demuestra que $V = \text{Ker } P \oplus \text{Im } P$.

b) Demuestra que una proyección siempre es diagonalizable.

c) Si V es euclídeo o hermítico, se dice que una proyección es *ortogonal* si $\ker P$ es ortogonal a $\text{Im} P$. Fijado un espacio de proyección $W \subset V$, podemos considerar el conjunto X de todas las proyecciones $P : V \to V$ con Im $P = W$. Demuestra que las proyecciones ortogonales minimizan la longitud del vector $u - P(u)$, i.e., si T es la proyección ortogonal sobre W demuestra que

$$\|u - T(u)\| = \min\{\|u - P(u)\| : P \in X\}.$$

d) Demuestra que P es una proyección ortogonal si y sólo si es una proyección autoadjunta. *Sugerencia: Prueba que* $\langle Pu, v\rangle = \langle Pu, Pv\rangle$.