

Espacios euclídeos y hermíticos II. Ortogonalidad. Gram-Schmidt. Complemento ortogonal

1. Sea  $V$  un espacio vectorial euclídeo y  $u, v \in V$ . Demuestra que:

- a) Los vectores  $u + v$  y  $u - v$  son ortogonales si y sólo si  $\|u\| = \|v\|$ .
- b) Los vectores  $u$  y  $v$  son ortogonales si y sólo si  $\|u + \lambda v\| \geq \|u\|$  para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

¿Valen las equivalencias anteriores en un espacio hermítico?

2. Sea  $V$  un espacio euclídeo o hermítico y  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ . Demuestra la siguiente generalización del teorema de Pitágoras: Si  $v_1, v_2, \dots, v_n$  son ortogonales dos a dos, entonces

$$\|v_1 + v_2 + \dots + v_n\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + \dots + \|v_n\|^2.$$

¿Es cierto el recíproco?

3. Sea  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  y  $\mathbb{K}_n = \{p(x) \in \mathbb{K}[x] : \text{grado}(p(x)) \leq n\}$  para un cierto  $n \in \mathbb{N}$ . Para  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  definimos en  $\mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x]$  la aplicación

$$\phi(p(x), q(x)) = \int_{-1}^1 p(t)q(t)dt.$$

- a) Demuestra que  $\phi$  es un producto escalar.
- b) Describe el subespacio de polinomios ortogonales al polinomio  $x$ .
- c) Calcula una base ortonormal de  $\mathbb{R}_3[x]$ .

4. Considera la forma bilineal  $\psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$\psi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

- a) Decide de manera razonada si  $\psi$  es un producto escalar.
  - b) Encuentra una base de  $\mathbb{R}^3$  respecto a la que la matriz de  $\psi$  sea diagonal.
5. Sea  $V = \mathbb{C}^3$  y sea  $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$  la base estándar. Sea  $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  la forma sesquilineal cuya matriz asociada respecto a  $\mathcal{B}$  es:

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 2 & 1+i \\ 0 & 1-i & 3 \end{pmatrix}$$

- a) Demuestra que  $\varphi$  es un producto hermítico.
- b) Calcula una base ortonormal de  $V$  respecto al producto escalar definido por  $\varphi$ .

6. Sean  $u_1 = (-2, -1, 1)$ ,  $u_2 = (0, -1, 0)$  y  $u_3 = (1, -1, 0)$  vectores de  $\mathbb{R}^3$ .

a) Demuestra que  $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$  es una base de  $\mathbb{R}^3$ .

b) Demuestra que existe un producto escalar  $\phi$  respecto al cual  $\mathcal{B}$  es una base ortogonal. Decide de manera razonada si  $\phi$  es único con esta propiedad.

c) Demuestra que existe un producto escalar  $\psi$  respecto al cual  $\mathcal{B}$  es una base ortonormal. Decide de manera razonada si  $\psi$  es único con esta propiedad. Describe la matriz de  $\psi$  respecto a la base canónica de  $\mathbb{R}^3$ .

7. En  $\mathbb{R}^3$  encuentra un producto escalar para el cual el complemento ortogonal del plano  $x = 0$  sea la recta  $\{x = y, z = 0\}$ . ¿Es único ese producto escalar?

8. Calcula el complemento ortogonal del subespacio

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, 2x_1 - x_2 = 0\},$$

cuando se considera en  $\mathbb{R}^4$  el producto escalar usual.

9. Calcula el complemento ortogonal de la recta  $L = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = x_3\}$  respecto al producto escalar habitual y respecto al siguiente producto escalar

$$\phi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1 y_1 + (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3)$$

10. En  $\mathbb{R}^3$ , se considera el producto escalar con matriz en la base canónica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Calcula una base ortonormal  $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ .

b) Sea  $W$  el subespacio ortogonal al vector de coordenadas  $(2, 0, 1)_{\mathcal{B}}$ . Describe  $W$  en las coordenadas de la base canónica.

11. Sean  $V$  un espacio vectorial euclídeo o hermitico y  $W_1, W_2$  dos subespacios vectoriales de  $V$ . Demuestra que

$$(W_1 + W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp} \quad \text{y que} \quad (W_1 \cap W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} + W_2^{\perp}.$$