ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA (31-1-2018)	•	Grado en Matemáticas Curso 2017–18	Hoja 1

Espacios euclídeos y hermíticos I.
Formas bilineales y hermíticas. Productos escalares. Normas inducidas por productos escalares.

1. Decide de manera razonada si las siguientes funciones $\varphi : V \times V \to \mathbb{K}$ son formas bilineales simétricas, o sesquilineales hermíticas, según corresponda, en los espacios vectoriales V sobre $\mathbb{K}$ con $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

a) $V = \mathbb{M}_2(\mathbb{K})$, con $\varphi(A, B) = \text{traza}(A + \overline{B})$;

b) $V = \mathbb{M}_2(\mathbb{K})$, con $\varphi(A, B) = \text{traza}(A\overline{B})$;

c) $V = \mathbb{M}_2(\mathbb{K})$, con $\varphi(A, B) = \text{traza}(A\overline{B}) - \text{traza}(A)\text{traza}(\overline{B})$;

d) $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ es diferenciable}\}$, con $\varphi(f, g) = \int_0^1 f'(t)g(t)dt$;

e) $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$, con $\varphi(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)(x^2 + 1)dx$;

f) $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$, con $\varphi(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x - 1)dx$;

g) $V = \mathbb{K}^2$, con $\varphi((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (x_1 + y_1)^2 - x_2y_2$.

2. Considera la base estándar $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$. Escribe la matriz $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ de las siguientes formas bilineales:

a) $\varphi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 2x_1y_1 - 3x_1y_3 + 2x_2y_2 - 5x_2y_3 + 4x_3y_1$;

b) $\varphi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) = 3x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$.

3. Considera ahora la base $\mathcal{B}' = \{(1, 2, 3), (-1, 1, 2), (1, 2, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y denotamos por $(x_1', y_1', z_1'), (x_2', y_2', z_2')$ las coordenadas de dos vectores de $\mathbb{R}^3$ respecto a la base $\mathcal{B}'$. Escribe la expresión en términos de las coordenadas anteriores de las formas bilineales del ejercicio 2.

4. Se dice que una forma bilineal (resp. sesquilineal) $\varphi : V \times V \to \mathbb{K}$ es antisimétrica (resp. antihermítica) si para todo par de vectores $u, v \in V$ se tiene que $\varphi(u, v) = -\varphi(v, u)$ (resp. $\varphi(u, v) = -\overline{\varphi(v, u)}$).

a) Encuentra una forma bilineal antisimétrica $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$;

b) Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V y sea φ una forma bilineal (resp. sesquilineal) en V. Da una condición necesaria y suficiente sobre $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ para que φ sea antisimétrica (resp. antihermítica);

c) Demuestra que toda forma bilineal (respectivamente, sesquilineal) φ en V se puede escribir como la suma de una forma bilineal simétrica (resp. hermítica) y una antisimétrica (resp. antihermítica) .

5. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ considera en $\mathbb{R}^3$ la aplicación bilineal

$$\phi_\alpha\left((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\right) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Calcula los valores de α para los que ϕ_α es un producto escalar.

6. Considera la aplicación $\phi : \mathbb{M}_3(\mathbb{R}) \times \mathbb{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por $\phi(A, B) = \text{traza } (AB^T)$.

a) Demuestra que ϕ es un producto escalar en $\mathbb{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$.

b) ¿Cuál sería el producto escalar análogo en $\mathbb{M}_3(\mathbb{C})$?

7. Para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ considera en $\mathbb{R}^3$ la aplicación bilineal

$$\phi_{\alpha,\beta}\left((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\right) = (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}\beta & \alpha & 0\\ \alpha & 1 & 0\\ 0 & 0 & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}.$$

Describe el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ determinado por los pares (α,β) para los que $\phi_{\alpha,\beta}$ es un producto escalar.

8. Sea $V = \mathbb{C}^3$ y sea $\mathcal{B} = \{e_1,e_2,e_3\}$ la base estándar. Sea $\varphi : V \times V \to \mathbb{C}$ la forma sesquilineal cuya matriz asociada respecto a $\mathcal{B}$ es:

$$\begin{pmatrix}1 & i & 0\\ -i & 2 & 1+i\\ 0 & 1-i & 3\end{pmatrix}$$

Demuestra que φ es un producto hermítico.

9. Sea $(V,\langle,\rangle)$ un espacio vectorial hermítico.

a) Demuestra la **Identidad del paralelogramo**: *Para todo par de vectores* $u,v \in V$,

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

b) Demuestra la **Identidad de polarización**: *Para todo par de vectores* $u,v \in V$,

$$4\langle u,v\rangle = \|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - i\|u-iv\|^2.$$

c) Demuestra que para todo par de vectores $u,v \in V$,

$$2\langle u,v\rangle = \|u+v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - (1+i)\|u\|^2 - (1+i)\|v\|^2.$$

d) ¿Cuáles serían las identidades de los apartados anteriores si V fuera un espacio vectorial euclídeo?

10. Sea $\|(x,y)\| = |x|+|y|$ definida en $\mathbb{R}^2$. Demuestra que $\|\cdot\|$ es una norma en $\mathbb{R}^2$, pero que no proviene de ningún producto escalar porque no satisface la identidad del paralelogramo.

11. Sea V un espacio vectorial euclídeo o hermítico. Demuestra que si $x,y \in V$ se tiene

$$\|x-y\| \geq \left|\|x\| - \|y\|\right|.$$

Teorema: *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ una norma en V. Si $\|\cdot\|$ satisface:*

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2), \qquad \textit{(Identidad del paralelogramo)}$$

entonces la forma bilineal

$$\phi(u,v) = \frac{\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2}{4},$$

define un producto escalar en V que cumple

$$\phi(u,u) = \|u\|^2.$$

Demostración: Pincha en el enlace