ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA • **Grado en Matemáticas** • **Grupo 71_**

(Parcial 1 : 2-3-2018) — **Curso 2017-2018**

---

1. (10 puntos) Sea $(V, \langle , \rangle)$ un espacio euclideo o hermítico.
Estudia si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica tu repuesta. (Recuerda que si la afirmación es verdadera hay que dar una demostración mientras que si la afirmación es falsa es suficiente con dar un contraejemplo):

a) Si $f : V \to V$ es una aplicación lineal, entonces $\varphi(u, v) = \langle f(u), f(v) \rangle$ define un producto escalar o hermítico en V.

b) Existen $u, v \in V$, $u \neq v$ de manera que $\|u\|^2 = \|v\|^2 = \langle u, v \rangle$.

c) Si V es euclideo y $u, v \in V$ cumplen $\|u\| = \|v\|$, se tiene que $u + v$ es ortogonal a $u - v$.

d) Si V es hermítico y $u, v \in V$ cumplen $\|u\| = \|v\|$, se tiene que $u + v$ es ortogonal a $u - v$.

---

2. Sea $(V, \langle , \rangle)$ un espacio euclideo o hermítico, y $\{u_1, \ldots, u_k\} \subset V$ un conjunto de vectores ortonormales dos a dos. Demostrar que para todo $v \in V$ se tiene la siguiente desigualdad:

$$\sum_{i=1}^{k} |\langle v, u_i \rangle|^2 \leq \|v\|^2.$$

a) (15 puntos) $\dim(V) < \infty$.

b) (5 puntos) $\dim(V) = \infty$.

---

3. Considera en $\mathbb{R}^3$ la forma bilineal dada por

$$\phi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 ,$$

y los vectores $u_1 = (1, 0, 0), u_2 = (0, 1, 0), u_3 = (0, 0, 1)$, cuyas coordenadas están dadas en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

a) (5 puntos) Prueba que ϕ define un producto escalar en $\mathbb{R}^3$ (no hace falta ver que es una forma bilineal).

b) (15 puntos) Utiliza el procedimiento de Gram-Schmidt, para ortogonalizar los vectores u_1, u_2 y u_3 con el producto escalar del enunciado.

c) (15 puntos) Halla la proyección ortogonal del vector $v = (1, 0, 1)$ sobre el subespacio W generado por los vectores u_1 y u_2 con el producto escalar del enunciado.

---

4. En $\mathbb{R}^3$ considera la aplicación lineal cuya matriz con respecto a la base canónica es

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) (5 puntos) Comprueba que A define una aplicación ortogonal con respecto al producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$.

b) (30 puntos) Identifica la aplicación ortogonal cuya matriz es A e indica sus elementos geométricos principales.
