Secretos del triángulo de Pascal

Eugenio Hernández
Universidad Autónoma de Madrid

Universidad de Otoño
20 de septiembre de 2016

"Puede parecer una pila de números bien ordenados, pero es en realidad un tesoro matemático. Los matemáticos indios la llamaron la escalera del Monte Meru.

```
                1
              1   1
            1   2   1
          1   3   3   1
        1   4   6   4   1
      1   5  10  10   5   1
    1   6  15  20  15   6   1
  1   7  21  35  35  21   7   1
1   8  29  56  70  56  29   8   1
```

En Irán, es el triángulo de Khayyam. Y en China, es el triángulo de Yang Hui. En gran parte del mundo occidental se le conoce como el triángulo de Pascal, por el matemático francés Blaise Pascal, lo que parece algo injusto ya que él llegó claramente tarde a la fiesta, pero todavía tenía mucho que aportar."([1])

---

[1] Ratemi, Wajdi Mohamed, *The mathematical secrets of Pascal's triangle*, ed.ted.com/lessons/

1. Secretos conocidos del triángulo de Pascal

Los números del triángulo de Pascal son números combinatorios. Sea C_k^n el número de grupos distintos (o combinaciones) (de k elementos) que se pueden formar con n objetos, donde $1 \le k \le n$.

Corolario 7 de Pascal: Si $n = 1, 2, 3, \dots$ y $1 \le k \le n$

$$\boxed{C_k^n = C_{k-1}^{n-1} + C_k^{n-1} \quad \text{donde} \quad C_0^n = 1 \,,\ n = 0, 1, 2, \dots}$$

D/ Supongamos que n el el número de jugadores de un equipo de baloncesto (p.e. $n=12$) y queremos hacer equipos de k jugadores (p.e. $k=5$). En el equipo juega Pau Gasol. Si Pau no está lesionado, el estará siempre en el equipo titular. Asi que el entrenador puede hacer C_{k-1}^{n-1} equipos. Si Pau ~~no~~ está lesionado, el entrenador solo dispone de $n-1$ jugadores para hacer equipos de k jugadores, es decir C_k^{n-1}. Como estas son todas las formas de hacer C_k^n se tiene $C_k^n = C_{k-1}^{n-1} + C_k^{n-1}$. ∎

———— x ————

Fila 0 $\longrightarrow$ $\binom{0}{0}$

Fila 1 $\longrightarrow$ $\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$

Fila 2 $\longrightarrow$ $\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$

Fila 3 $\rightarrow$ $\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$

$\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$

$\binom{5}{0}$ $\binom{5}{1}$ $\binom{5}{2}$ $\binom{5}{3}$ $\binom{5}{4}$ $\binom{5}{5}$

Con la notacion $C_k^n = \binom{n}{k}$ el triángulo queda como a la izquierda. Como la fila 1 coincide con la fila 1 del triángulo de Pascal, los dos triángulos son iguales por el Corolario 7 de Pascal.

Corolario 8 de Pascal

Si S_n es la suma de los términos de la fila n del triángulo de Pascal, $S_n = 2^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

D/ La prueba de Pascal es por inducción en n. Puede comprobarse que $S_0 = 1 = 2^0$. Si el resultado fuera cierto para la fila $n-1$, por el Corolario 7 de Pascal,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} C_k^n + 1 = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (C_{k-1}^{n-1} + C_k^{n-1}) + 1$$

$$= \left(C_{n-1}^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} C_{k-1}^{n-1} \right) + \left(\sum_{k=1}^{n-1} C_k^{n-1} + C_0^{n-1} \right) = S_{n-1} + S_{n-1} =$$

$$= 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n. \qquad \blacksquare$$

Pascal escribe también el siguiente resultado como Corolario 9: la suma de los números del triángulo de Pascal desde la fila 0 hasta la fila $n-1$ excede en 1 a la suma de los términos de la fila n:

$$S_0 + S_1 + S_2 + \ldots + S_{n-1} = S_n - 1$$

Por el Corolario 8 de Pascal, la parte izquierda es la suma de los términos de la progresión geométrica

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}$$

cuyo resultado es $2^n - 1 = S_n - 1$.

El número combinatorio C_k^n se calcula con la fórmula

$$C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!} \equiv \binom{n}{k}$$

El número de combinaciones C_k^n coincide con el número de variaciones V_k^n (donde el orden es importante) dividido entre el número de permutaciones de k elementos, P_k. Por la regla fundamental de contar variaciones

$$V_k^n = n(n-1)(n-2) \ldots (n-k+1)$$

y

$$P_k = k(k-1) \ldots \times 2 \times 1 = k!$$

Entonces,

$$C_k^n = \frac{V_k^n}{P_k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)\times \ldots \times 2\times 1)} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

x

1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	
1	3	6	10	15	21	28		
1	4	10	20	35	56			
1	5	15	35	70				
1	6	21	56					
1	7	28						
1	8							
1								

$\hookrightarrow$ Números tetragonales

$\hookrightarrow$ Números triangulares

x

Los coeficientes del desarrollo de $(x+y)^n$ son los números del triángulo de Pascal de la fila n:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k. \qquad (1.1)$$

Como es fácil comprobar (1.1) para $n=1$ o $n=2$, el resultado se deduce del Corolario 7 de Pascal. En efecto

$$(x+y)^n = (x+y)^{n-1}(x+y) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{n-1-k} y^k\right)(x+y)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{n-k} y^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{n-1-k} y^{k+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{n-k} y^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^{n-k} y^k$$

$$= x^n + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}\right] x^{n-k} y^k + y^n$$

$$= x^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k + y^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \quad \blacksquare$$

———— x ————

El corolario 8 de Pascal puede demostrarse ahora fácilmente ya que $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$.

<u>Ejercicio</u>. Escribe el número decimal que se obtiene escribiendo de izquierda a derecha los elementos de la fila n del triángulo de Pascal, es decir $\binom{n}{0}\binom{n}{1}\binom{n}{2} \cdots \binom{n}{n}$. Prueba que este número es 11^n

———— x ————

2. Números pares en el triángulo de Pascal

¿Cuál es la proporción de números pares en un triángulo de Pascal infinito? En lugar de contar vamos a colorearlo. Poniendo los números del triángulo de Pascal en celdas hexagonales, colorear de rojo las celdas que tienen un número de Pascal par y dejar ~~azul~~ en blanco las que tienen un número de Pascal impar. El resultado se muestra en ~~las~~ figuras 1 y 2 del final. La figuras que se muestran son los primeros pasos de una estructura fractal conocida como el triángulo de Sierpinski.

La página shodor.org permite colorear interactivamente un triángulo de Pascal de 15 filas.

El coloreado se puede sustituir por 0 si el número es par o 1 si el número es impar. El triangulo de Pascal se hace ahora siguiendo las reglas de la aritmética modular en módulo 2.

Una hoja de cálculo permite hacer el triángulo de Pascal módulo 2 rápidamente. Comienza con 1's en la fila 1 y en la columna A. En la casilla B2 hay que poner la suma B1+A2 (módulo 2). Una posible instrucción en Excel© es: situar el cursor en la celda **B2** y escribir

= (B1 + A2) - 2 * REDONDEAR.MENOS ((B1+A2)/2 ; 0)

Debe aparecer un 0 en la celda B2. "Tirar" del extremo inferior derecho de esta casilla hacia la derecha y hacia abajo para rellenar el resto de las celdas.

Ahora se pueden colorearse las celdas con 0 (pares) de rojo y las celdas con 1 (impares) de blanco. En Excel ©, seleccionar todas las celdas con 0 y 1. Luego ir a

Formato condicional → Administrar reglas

→ Nueva regla

→ Aplicar formato únicamente a las celdas que contengan

Cambiar $\boxed{\text{entre}}$ por $\boxed{\text{igual a}}$ →

Poner 0 en el recuadro derecho.

Ir a Formato y elegir color de relleno

Aceptar todos los diálogos.

———— x ————

Contemos el número de impares hasta las filas 3, 7, 15, 31, ... y en general hasta la fila 2^n-1:

n	Fila 2^n-1	Impares	Total
2	3	$9=3^2$	$10=\binom{5}{2}$
3	7	3^3	$\binom{9}{2}$
4	15	3^4	$\binom{17}{2}$
5	31	3^5	$\binom{33}{2}$
n	2^n-1	3^n	$\binom{2^n+1}{2}$

La cantidad de números que hay hasta la fila 2^n-1 es

$$1+2+3+\ldots+2^n = \frac{(2^n+1)\cdot 2^n}{2} = \binom{2^n+1}{2}.$$

Así pues, la proporción de impares en un triángulo de Pascal infinito es

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{\frac{(2^n+1)\cdot 2^n}{2}} \leq 2\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{4^n} = 2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0.$$

Esto conduce a:

La proporción de números pares en un triángulo de Pascal infinito es 1.

¿Cual es la proporción de números múltiplos de 3 en un triángulo de Pascal infinito?

Si se colorea a mano hay que usar tres colores, uno para los múltiplos de 3, otro para los que dan resto 1 al dividir entre 3 y otro para los que dan resto 2 al dividir entre 3. Se puede hacer también un triángulo de Pascal módulo 3 con una hoja de cálculo y colorear ~~solo~~ los ceros de este triángulo. El resultado coloreado puede verse en la figura 3 del final.

En el dibujo coloreado se observa que hay ~~la~~ filas que no tienen múltiplos de 3, ~~como~~ la 2, la $8=3^2-1$, la $26=3^3-1$ ..... Así que contemos los números del triángulo de Pascal que no son múltiplos de 3 hasta la fila 3^n-1:

n	Fila 3^n-1	No múltiplos de 3	Totales
1	2	6	6
2	8	6^2	$\binom{10}{2}$
3	26	6^3	$\binom{28}{2}$
n	3^n-1	6^n	$\binom{3^n+1}{2}$

La cantidad de números que no son múltiplos de 3 en un triángulo de Pascal infinito es

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{6^n}{\binom{3^n+1}{2}} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{6^n}{(3^n+1)3^n} \leq 2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6}{9}\right)^n = 0$$

Esto conduce a:

$$\boxed{\text{La proporción de múltiplos de 3 en un triángulo de Pascal infinito es } 1.}$$

Marta Sved ([2]) prueba que el resultado es cierto para cualquier número primo p. Establece que la cantidad de números que no son múltiplos de p hasta la fila p^n-1 son $\left(\frac{p+1}{2}\right)^n$. Como los números

---

[2] Sved, Marta, Divisibility - With Visibility, The Mathematical Intelligencer, Vol 10, N°2, (1988), 56-64.

del triángulo de Pascal hasta la fila p^n-1 son $\binom{p^n+1}{2}$ se tiene

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\binom{p+1}{2}^n}{\binom{p^n+1}{2}} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{(p+1)^n p^n}{2^n(p^n+1)p^n} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{(p+1)^n}{2^n(p^n+1)}$$

$$\leq 2\lim_{n\to\infty} \left(\frac{p+1}{2p}\right)^n = 0 .$$

Por tanto, para todo número p, primo, la proporción de números múltiplos de p en un triángulo de Pascal infinito es 1.

———— x ————

Regresemos a los números pares e impares. ¿Como saber, sin calcularlo, cuando el número $\binom{n}{k}$ del triángulo de Pascal es par o impar?

Una respuesta la dio Édouard Lucas (1842-1891), matemático francés, inventor del juego de las Torres de Hanoi. Se escribe n en base 2:

$$n = a_k 2^k + a_{k-1}2^{k-1} + \dots + a_1 2 + a_0$$

con $a_k \neq 0$ y $a_m = 0, 1$ para $m = 0, 1, \dots, k$. Se escribe también k en base 2:

$$k = b_\ell 2^\ell + b_{\ell-1}2^{\ell-1} + \dots + b_1 2 + b_0$$

esta vez añadiendo ceros a la izquierda para que k tenga tantos dígitos binarios como n $(k \leq n)$.

E. Lucas estableció el siguiente resultado:

$$\binom{n}{k} = \binom{a_l}{b_l}\cdot\binom{a_{l-1}}{b_{l-1}}\cdot\ldots\cdot\binom{a_1}{b_1}\binom{a_0}{b_0} \pmod 2 \qquad (2.1)$$

Aquí, $\binom{1}{0}=1$, $\binom{1}{1}=1$, pero $\binom{0}{1}=0$ (notación).

$\binom{0}{0}=1$

Un ejemplo puede aclarar el significado de (2.1). Estudiemos si $\binom{26}{9}$ es par o impar. Como

$$26 = 2^4+2^3+2 = 11010_{(2}$$

y

$$9 = 2^3+1 = 01001_{(2}$$

$$\binom{26}{9} = \binom{1}{0}\binom{1}{1}\binom{0}{0}\binom{1}{0}\binom{0}{1} \pmod 2 = 0 \pmod 2$$

porque $\binom{0}{1}=0$. Por tanto, $\binom{26}{9}$ es par.

El resultado de Edouard Lucas (2.1) permite probar sin dificultad que todos los números de las filas 2^n-1 de un triángulo de Pascal son impares. Esto es porque

$$2^n-1 = 2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots+2+1 = 11\ldots1_{(2}$$

y por tanto todos los números combinatorios de la derecha de (2.1) son 1.

La construcción del triángulo de Pascal permite ahora deducir que los números combinatorios $\binom{2^n}{k}$, $1\le k\le 2^n-1$ son todos pares.

De este resultado hay una demostración que no necesita conocer (2.1). Se parte de la igualdad

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1},$$

que puede probarse con la fórmula para calcular números combinatorios. Con $n \to 2^n$ se tiene

$$k\binom{2^n}{k} = 2^n\binom{2^n-1}{k-1}.$$

Por tanto, $k\binom{2^n}{k}$ es divisible entre 2^n. Como $k \leq 2^n - 1$ puede tener como máximo un factor 2^{n-1}, dejando al menos un 2 como factor de $\binom{2^n}{k}$. Así pues, $\binom{2^n}{k}$ es par si $1 \leq k \leq 2^n - 1$.

<u>Ejercicio</u>. El lector puede probar, con un razonamiento similar al anterior, que, si p es primo, $\binom{p^n}{k}$ es múltiplo de p cuando $1 \leq k \leq p^n - 1$.

———— x ————

3. El número e en el triángulo de Pascal

En el año 2012, H. Brothers ([3]) hizo pública una aparición sorprendente del número e en el triángulo de Pascal. Sea $P_n = \prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ el producto de todos los números de la fila n del triángulo de Pascal. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{n+1} \cdot P_{n-1}}{P_n^2} = e \qquad (3.1)$$

D/ Tenemos

$$P_n = \prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \prod_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{(n!)^{n+1}}{\prod_{k=0}^{n} (k!)^2} .$$

Por tanto,

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{((n+1)!)^{n+2}}{(n!)^{n+1}} \cdot \frac{\prod_{k=0}^{n} (k!)^2}{\prod_{k=0}^{n+1} (k!)^2} = \frac{(n+1)^{n+2}\, n!}{1} \frac{1}{((n+1)!)^2}$$

$$= \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(n+1)^n}{n!} .$$

De aquí,

$$\frac{P_{n+1}\,P_{n-1}}{P_n^2} = \frac{P_{n+1}}{P_n} \cdot \left(\frac{P_n}{P_{n-1}}\right)^{-1} = \frac{(n+1)^n}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{n^{n-1}} = \frac{(n+1)^n}{n^n} =$$

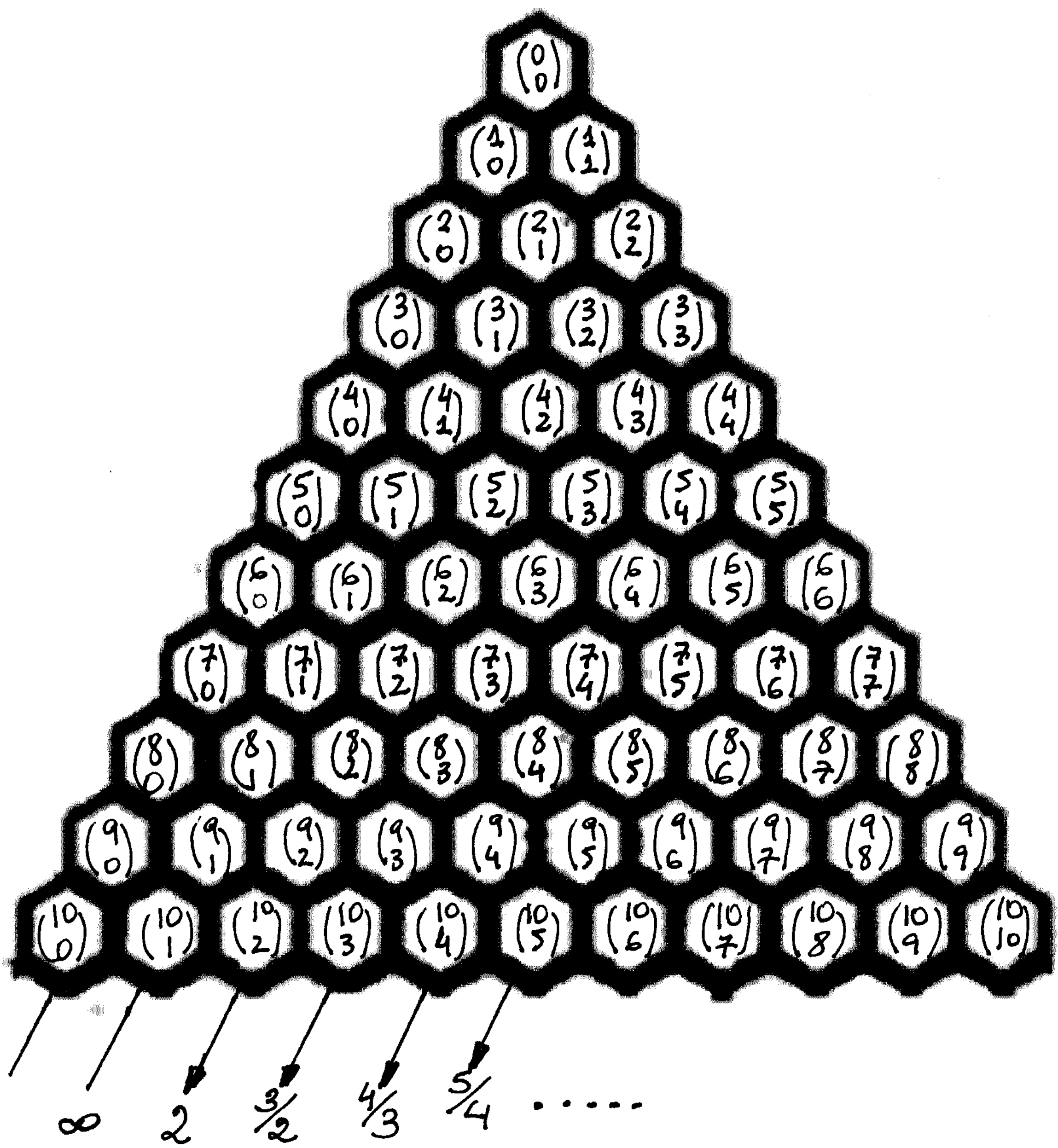
$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ y } \ldots\ldots \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \qquad \blacksquare$$

---

[3] Brothers, Harlan J., Math Bite: Finding e in Pascal's triangle, Math. Mag. 85 (2012), p. 51

4. Suma infinita de los inversos de las diagonales en un triángulo de Pascal

$$\sum_{n\geq k}^{\infty} \frac{1}{\binom{n}{k}} = \frac{k}{k-1} \quad , \; k \geq 2 \qquad (4.1)$$



Si ponemos $k=0$ en (4.1), como $\binom{n}{0}=1$ se tiene que la suma es ∞. Si $k=1$ se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{n}{1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = \infty \quad \text{(serie harmónica)}.$$

La tendencia cambia si $k=2$:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\binom{n}{2}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2!(n-2)!}{n!} = 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 2\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

Todos los términos de esta serie se cancelan menos el primero (suele decirse que la serie es telescópica):

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\binom{n}{2}} = 2\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}\right) = 2\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n-1}\right)$$

$$= 2 \cdot 1 = 2$$

ya que solo sobrevive el termino $n=2$ de la primera serie.

El caso general, descrito en (4.1), se demuestra con un argumento similar. Tenemos,

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{\binom{n}{k}} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{k!(n-k)!}{n!} = k! \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(n-k)!}{n!}.$$

Como

$$\frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}$$

y
$$\frac{1}{n(n-k+1)} = \left(\frac{1}{n-k+1} - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{k-1}$$

se tiene

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{\binom{n}{k}} = \frac{k!}{k-1} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{(n-1)\cdots(n-k-2)} \left[\frac{1}{n-k+1} - \frac{1}{n}\right]$$

$$= \frac{k!}{k-1}\left(\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{(n-1)\cdots(n-k+1)} - \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)\cdots(n-k+2)}\right)$$

Únicamente el término $n=k$ de la primera de estas dos series no se cancela. En efecto, cambiando n por $n-1$ en la segunda suma se obtiene

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{\binom{n}{k}} = \frac{k!}{k-1}\left(\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{(n-1)\cdots(n-k+1)} - \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)\cdots(n-k+1)}\right)$$

$$= \frac{k!}{k-1}\,\frac{1}{(k-1)\cdot\ldots\cdot 1} = \frac{k!}{k-1}\,\frac{1}{(k-1)!} = \frac{k}{k-1}\,.$$

———————— x ————————

Último secreto: De (4.1) se deduce $\displaystyle\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{\binom{n}{k}} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{\binom{n}{k}} - 1$ $\displaystyle = \frac{k}{k-1} - 1 = \frac{1}{k-1}$. Como $\displaystyle \ln(1+x) = \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{k-1}}{k-1}$, se deduce

$$\ln 2 = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{\binom{n}{k}}\,.$$

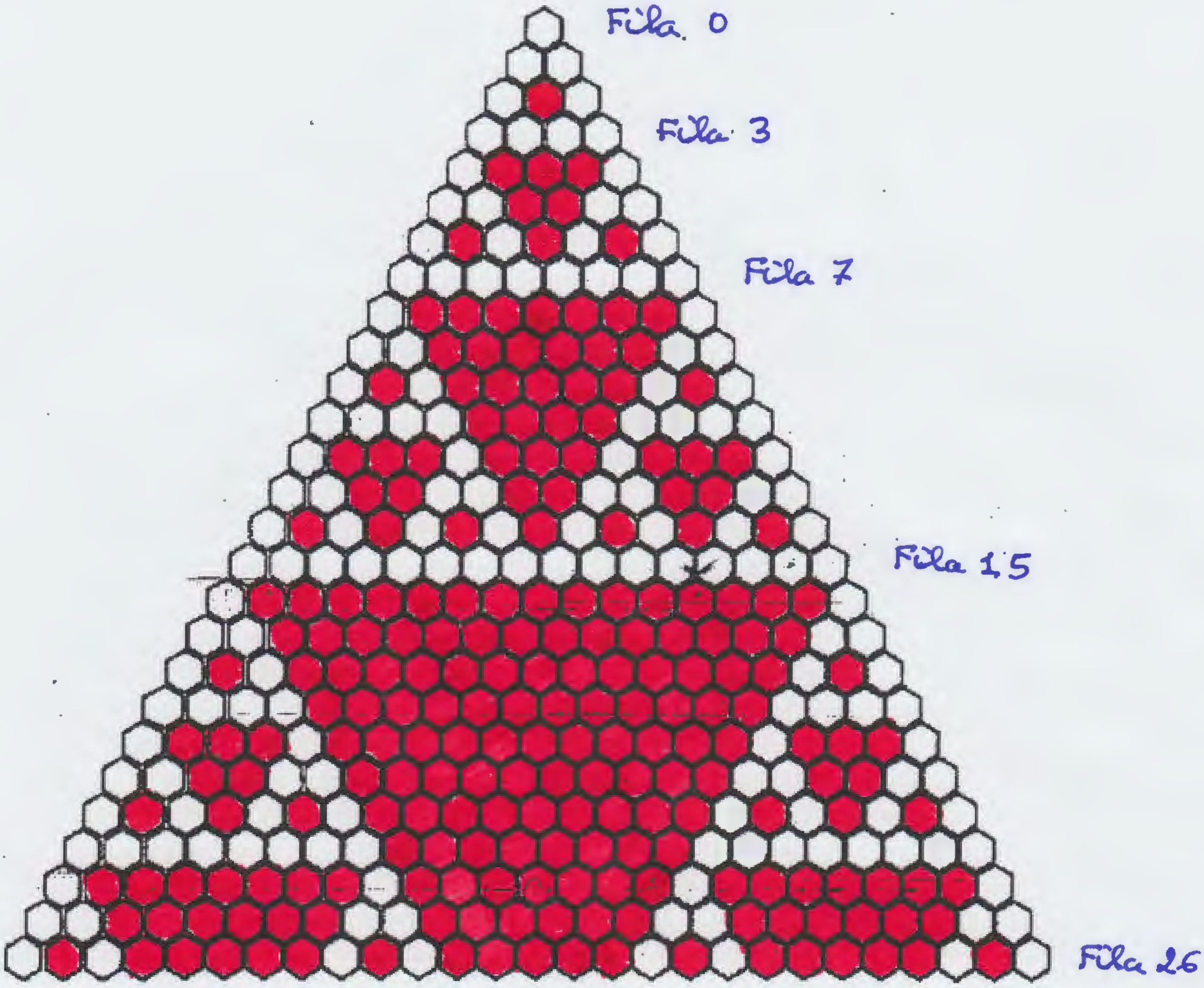


FIGURA 1 : Múltiplos de 2

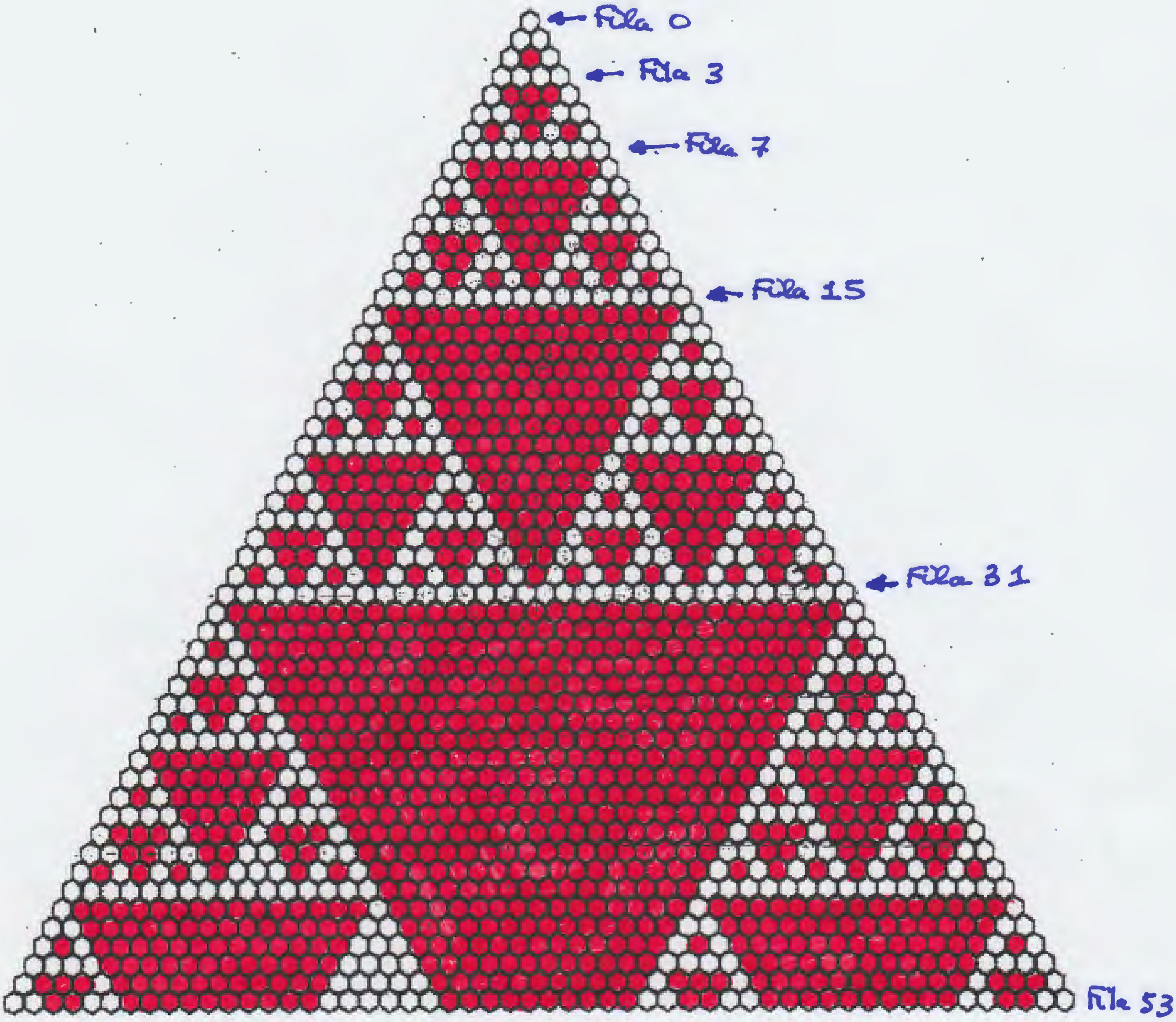


FIGURA 2: Múltiplos de 2

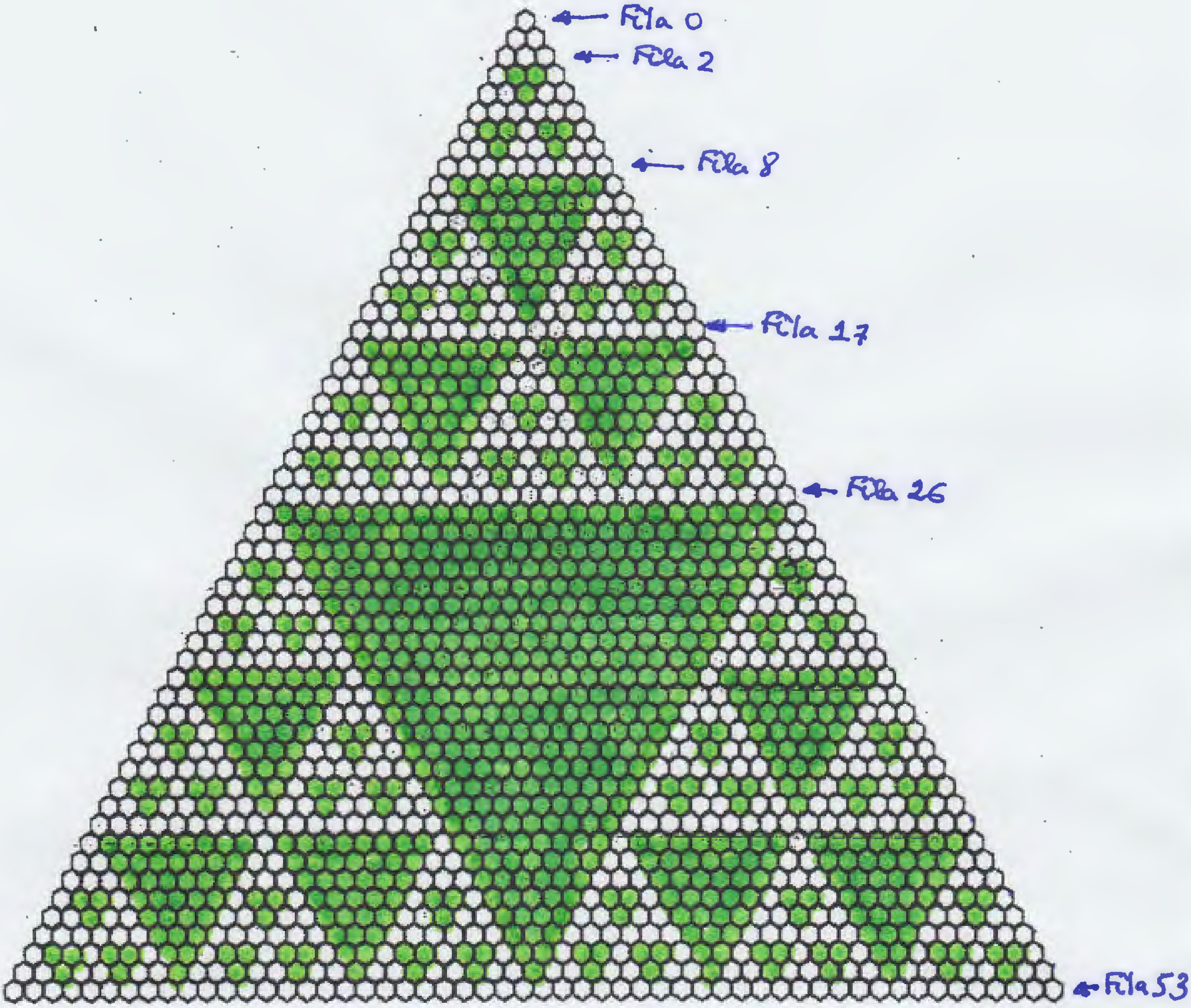


FIGURA 3: Múltiplos de 3