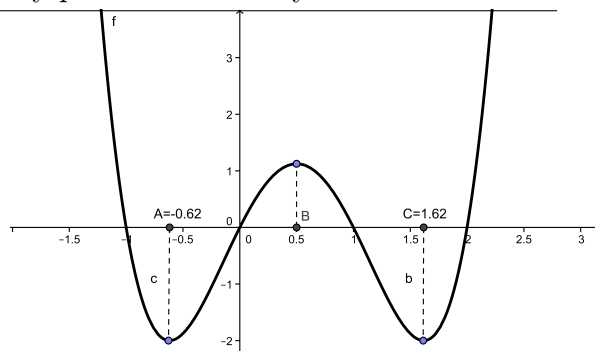


Hoja 3: Derivadas, gráficas de funciones y polinomios de Taylor

1.- Sea $f(x)$ una función cuya gráfica es la siguiente:

- Determinar los intervalos donde la función derivada f' es positiva.
- Determinar los intervalos donde la función derivada f' es creciente.
- Esbozar aproximadamente la gráfica de f' .



2.- Calcular las derivadas de las siguientes funciones en su dominio de definición:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \ y = \ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} & \text{(b)} \ y = \sin(\ln x) & \text{(c)} \ y = \ln(x^2 \ln^3 x) \\
 \text{(d)} \ y = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}} & \text{(e)} \ y = \arcsen \sqrt{x^2 - 1} & \text{(f)} \ y = x^{\ln x}
 \end{array}$$

3.- Para aplicar a un problema físico la regla de la cadena que se ha practicado en el ejercicio anterior, supongamos que un observador se encuentra situado a 100 m de un globo que se eleva a una velocidad de 50 m/min. ¿Con qué rapidez crece el ángulo de elevación de la línea de visión del observador cuando el globo está a una altura de 100 m? Como sugerencia, si llamamos $f(t)$ a la altura del globo en el instante t y el ángulo buscado es $\alpha(t)$, se tiene que $f(t)/100 = \tan \alpha(t)$ (dibujar un triángulo rectángulo para comprobarlo).

4.- Hallar el valor de los parámetros para que las funciones que se definen a continuación sean derivables en todo su dominio:

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 2, \\ a \cdot x + b & \text{si } x > 2. \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} a + b \cdot x^2 & \text{si } |x| \leq 2, \\ \frac{1}{|x|} & \text{si } |x| > 2. \end{cases}$$

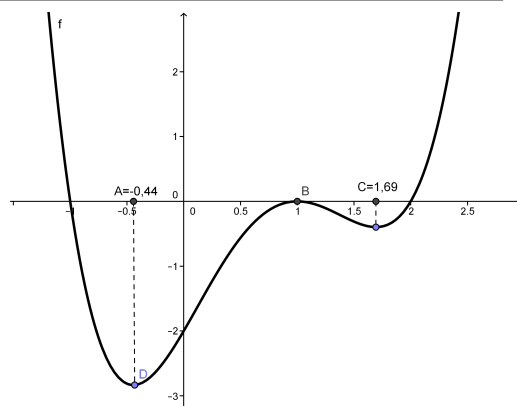
5.- Dibujar, de forma clara, una función derivable que tenga mínimos locales en los puntos $x = -1$ y $x = 1$, y además un máximo local en $x = 0$. Si la función dibujada fuera un polinomio, ¿cual debería ser como mínimo su grado y por qué?

6.- Dibujar aproximadamente la gráfica de una función $f(x)$, de la que conocemos los siguientes datos:

- El dominio de f es $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.
- $f'(x) > 0$ en $(-\infty, -1) \cup (1, 3) \cup (4, 6)$.
- $f'(x) < 0$ en $(-1, 1) \cup (3, 4) \cup (6, \infty)$.
- $f''(x) > 0$ en $(-\infty, -2) \cup (0, 3) \cup (3, 5) \cup (7, \infty)$.
- $f''(x) < 0$ en $(-2, 0) \cup (5, 7)$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty$.
- $f(0) = f(2) = f(4) = 0$, $f(-1) = f(6) = 1$, $f(1) = -1$.

7.- De una función $f(x)$ solamente conocemos la gráfica de su derivada $f'(x)$, que tiene el aspecto siguiente:

- Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$.
- Determinar los intervalos de concavidad y convexidad de la función $f(x)$.
- Esbozar aproximadamente la gráfica de f .



8.- Calcular el valor máximo y mínimo de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ en el intervalo $[-2, 6]$.

9.- Demostrar que la ecuación $6x^5 + 13x + 1 = 0$ tiene exactamente una raíz real.

10.- Estudiar y representar las gráficas de las siguientes funciones en el conjunto de puntos donde estén definidas.

$$(a) f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x + 2} \quad (b) f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5} \quad (c) f(x) = e^{-x^2}$$

$$(d) f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (e) f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

11.- Estudiar la concavidad de la función $f(x) = \frac{x^2}{2} - \log|x|$ en su dominio de definición.

12.- Prueba que la función $f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$ es creciente en todo su dominio de definición.

13.- Considerar la función $f(x) = e^{-1/x^2}$

- Probar que la función $f(x)$ tiene un mínimo local en $x = 0$ y que tiene como asíntota horizontal la recta $y = 1$.
- Hallar los valores máximo y mínimo de la función $f(x)$ en el intervalo $[-1, 1]$.

14.- Sea $N(t)$ el tamaño de una población y supongamos que la velocidad de crecimiento per cápita es del 3%. Se sabe que el tamaño de la población en $t = 4$ es 100 (en miles de individuos). Usar una aproximación lineal para calcular el tamaño de la población en el instante $t = 4, 1$.

15.- Hallar el polinomio de Taylor de grado 3 de las siguientes funciones:

$$(a) f(x) = \cos x \text{ en } a = \frac{\pi}{4} \quad (b) f(x) = \log x \text{ en } a = 1 \quad (c) f(x) = x^{\frac{1}{2}} \text{ en } a = 1$$

16.- Calcular el polinomio de Taylor de grado 4 en $a = 0$ para la función $f(x) = \frac{1}{1-x}$. ¿Qué sucede si se utiliza este polinomio de Taylor para calcular el valor aproximado de $f(2)$?

17.- a) Hallar el polinomio de Taylor de grado 4 para aproximar la función $y = f(t) = \ln(1+t)$ alrededor de $t = 0$. Comparar el valor de tu calculadora y el aproximado para $t = 1$.

b) ¿Qué grado del polinomio de Taylor de $y = f(t) = \ln(1+t)$ en $a = 0$ permite estimar $\ln(1,1)$ con un error inferior a 10^{-3} ?

18.- Calcular el polinomio de Taylor de grado 3 en $x = 2$ del polinomio $P(x)$ que cumple

$$P(0) = 1, \quad P'(0) = 0, \quad P''(0) = -2, \quad P'''(0) = 12.$$