Matemáticas — Curso 2015-2016
Primero de Biológicas

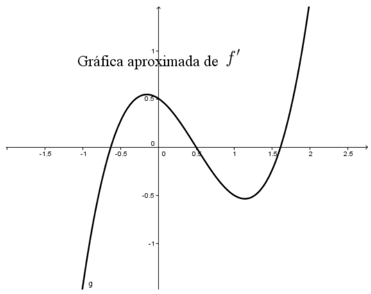
Hoja 3: Derivadas, gráficas de funciones y polinomios de Taylor

Respuestas

1. a) f' es positiva donde f es creciente, es decir $(-0.62, 0.5) \cup (1.62, \infty)$.

   b) f' es creciente donde f es cóncava hacia arriba, es decir $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ aproximadamente.

   c)



2. (a) $y' = \dfrac{4x}{(x^2-1)(x^2+1)}$ (b) $y' = \dfrac{1}{x}\cos(\ln x)$ (c) $y' = \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x \ln x}$

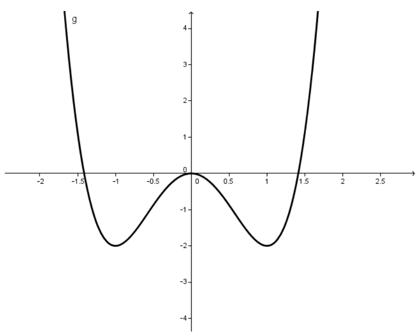
   (d) $y' = \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)^4}}$ (e) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ (f) $y' = x^{\ln x} 2(\ln x)\dfrac{1}{x}$

3. El ángulo crece con una rapidez de 0.25 radianes por minuto.

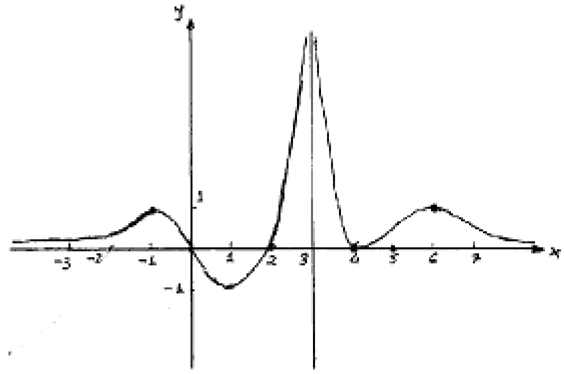
4. La función f_1 es derivable cuando $a = 4$ y $b = -4$.

   La función f_2 es derivable cuando $a = 3/4$ y $b = -1/16$.

5. Si la función dibujada fuera un polinomio debería ser al menos de grado 4, porque su derivada tiene al menos tres soluciones. Este es un ejemplo:



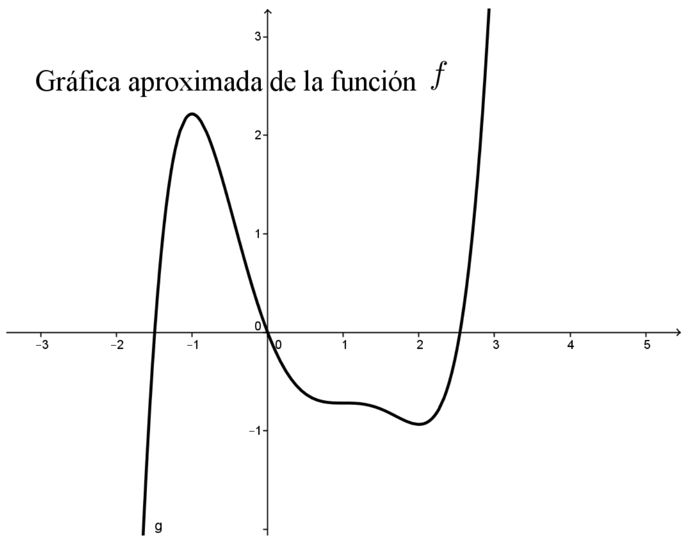
6. La gráfica aproximada de la función es:



7. a) La función f crece en $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$ y decrece en $(-1, 2)$.

   b) Es cóncava hacia arriba cuando f' es creciente, es decir en $(-0.44, 1) \cup (1.69, \infty)$. Es concava hacia abajo cuando f' es decreciente, es decir en $(-\infty, -0,44) \cup (1, 1.69)$.

   c)



8. El valor máximo de la función es 55, que se alcanza en $x = 6$, y el valor mínimo es -26 que se alcanza en $x = 3$.

9. Basta probar que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ y f es siempre creciente.

10. Comprueba tus resultados usando Geogebra © o WolframAlpha ©.

11. Es cóncava hacia arriba en su dominio de definición, que es $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

12. Su dominio de definición es $(-1, 1)$. En este conjunto hay que mostrar que la derivada de f es postiva.

13. (b) El valor máximo es $1/e$ y se alcanza tanto en $x = -1$ como en $x = 1$. El valor mínimo es 0 y se alcanza en $x = 0$.

14. $N(4.1) \approx 100.300$ individuos.

15. (a) $P_3 f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}(x - \frac{\pi}{4})^2 + \frac{1}{6}\frac{1}{\sqrt{2}}(x - \frac{\pi}{4})^3$

(b) $P_3f(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$

(c) $P_3f(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3$

16. $P_4f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$. El valor de $f(2)$ es -1 mientras que $P_4f(2) = 31$. No puede usarse este polinomio para aproximar el valor de $f(2)$.

17. $P_4f(x) = x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{4}x^4$. Se tiene que $f(1) = \ln 2 \approx 0.69314718$ (Ninguna de las cifras decimales es correcta.)

    (b) Con calculadora $\ln(1.1) \approx 0.095310179$. Por otro lado $P_4f(0.1) \approx 0.095308\overline{3}$. Estos valores coinciden hasta la cuarta cifra decimal. Un polinomio de grado 4 es suficiente. También puede comprobarse que es suficiente un polinomio de Taylor de grado 2.

18. $P_3(x) = 13 + 20(x-2) + 11(x-2)^2 + 2(x-2)^3$