ÁLGEBRA LINEAL.

Eugenio Hernández

MATEMÁTICAS // GRADO EN BIOLOGÍA

Ejemplos de sistemas de evolución discretos

EJEMPLO 1. (MODELO DE P. LESLIE, 1945)

Para estudiar la evolución de una población de pájaros los dividimos en dos grupos de edad: jóvenes y adultos. Los jóvenes no se reproducen y el 30 % de ellos sobrevive y llegan a la primavera siguiente convertidos en adultos. Cada adulto produce una media de 2 jóvenes por año y el número de adultos que sobrevive cada año es el 40 %. Inicialmente hay 1000 adultos y ningún joven.

a) Escribe el modelo matricial de la dinámica de esta población.

b) ¿Cuántos pájaros habrá en cada grupo de edad en el tercer año?

Formulación matemática : sean J_n y A_n el número de jóvenes y adultos, respectivamente, al final del año n. Tenemos $J_0 = 0$ y $A_0 = 1000$, y además,

$$\left\{ \begin{array}{l} J_n = 2A_{n-1} \\ A_n = 0,3J_{n-1} + 0,4A_{n-1} \end{array} \right\}.$$

Este sistema puede escribir usando matrices de la forma:

$$\begin{pmatrix} J_n \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{n-1} \\ A_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1000 \end{pmatrix}.$$

OBJETIVO 1.

Calcular la **tasa de crecimiento de cada grupo de edad en el año n**, es decir $\dfrac{J_n}{J_{n-1}}$ y $\dfrac{A_n}{A_{n-1}}$ y la **tasa de crecimiento de cada grupo de edad con el paso del tiempo**, es decir $\lim_{n\to\infty} \dfrac{J_n}{J_{n-1}}$ y $\lim_{n\to\infty} \dfrac{A_n}{A_{n-1}}$.

OBJETIVO 2.

Calcular **la distribución de cada grupo de edad en el año n** , es decir $\dfrac{J_n}{J_n + A_n}$ y $\dfrac{A_n}{J_n + A_n}$, y **la distribución de cada grupo de edad con el paso del tiempo** , es decir $\lim_{n\to\infty} \dfrac{J_n}{J_n + A_n}$ y $\lim_{n\to\infty} \dfrac{A_n}{J_n + A_n}$.

EJEMPLO 2. (MODELO DE A. MARKOV, 1906)

Dos paises A y B comparten la misma moneda. Inicialmente A tiene el 60 % de la monedas y B tiene el 40 %. Cada año el 80 % de las monedas que hay en un país se queda en el mismo y el 20 % pasa al otro país.

a) Escribe la formulación matemática de este sistema evolutivo.

b) Halla la tasa de variación del porcentaje de monedas en cada pais al cuarto año y en el año 20. ¿Cuál crees que puede ser la tasa de variación del porcentaje de monedas en cada pais a lo largo del tiempo?

c) ¿Qué porcentaje de monedas crees que habrá en cada país a lo largo del tiempo?

Sean x_n e y_n el el porcentaje de monedas en A y en B, respectivamente, al finalizar el año n. Tenemos $x_0 = 60$ e $y_0 = 40$, y además,

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n = 0,8x_{n-1} + 0,2y_{n-1} \\ y_n = 0,2x_{n-1} + 0,8y_{n-1} \end{array} \right\}.$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 60 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

Este es el modelo matemático. La respuesta a las preguntas se obtiene, por ahora, con una hoja de cálculo.

Autovalores y autovectores.

AUTOVALORES DE UNA MATRIZ A

Un número λ es un autovalor de una matriz cuadrada A de orden n si $det(A - \lambda I_n) = 0$.

AUTOVECTORES DE UNA MATRIZ A

Un vector no nulo $\vec{v}$ es un autovector de una matriz A asociado con un autovalor λ si $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. (Es decir, $\vec{v}$ es solución de la ecuación $(A - \lambda I_n)\vec{v} = \vec{0}$.

VECTORES LINEALMENTE INDEPENDIENTES

Un conjunto de k vectores, $\vec{v_1}, \vec{v_2} \ldots \vec{v_k}$, de $\mathbb{R}^n$ se dice que son linealmente independientes si el rango de la matriz de orden $n \times k$ que se forma poniendo los vectores por columna es k.

CÁLCULO DE AUTOVALORES.

Los autovalores de una matriz cuadrada A son las soluciones λ de la ecuación $det(A - \lambda I_n) = 0$.

Ejercicio 1. Hallar los autovalores de la matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 2. Hallar los autovalores de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,4 \end{pmatrix},$$

que es la matriz de evolución del ejemplo 1.

Ejercicio 3. Hallar los autovalores de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix},$$

que es la matriz de evolución del ejemplo 2.

Cálculo de autovectores.

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovector de una matriz cuadrada A de tamaño n, cualquier solución **no nula** de la ecuación $(A - \lambda I_n)\vec{x} = \vec{0}\,, \vec{x} \in \mathbb{R}^n$, es un autovector de A de autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 4. Hallar dos autovectores linealmente independientes de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}$, y escribir A en su forma diagonal indicando la matriz de paso P.

Ejercicio 5. Hallar los autovectores de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, y decidir si es posible encontrar tres autovectores linealmente independientes.

Significado de los autovalores y autovectores en los sistemas de evolución discretos.

Tasa de crecimiento de cada grupo.

Sea $\vec{X}_n = A\overrightarrow{X_{n-1}}$ un sistema de evolución con k grupos. Si la matriz A es diagonalizable con autovalor dominante λ_1 (es decir, λ_1 es mayor que el resto de los autovalores en valor absoluto), la **tasa de crecimiento** de cada grupo tiende a λ_1 con el paso del tiempo.

NOTA: La tasa de variación λ debe ser un número positivo cuando se estudian sistemas biológicos.
i) Si $\lambda > 1$ la población crece indefinidamente.
ii) Si $\lambda = 1$ la población tiende a un valor fijo con el paso del tiempo.
ii) Si $\lambda < 1$ la población tiende a extinguirse.

Distribución de la población en cada grupo.

Sea $\vec{X}_n = A\overrightarrow{X_{n-1}}$ un sistema de evolución con k grupos. Si la matriz A es diagonalizable y λ_1 es un autovalor dominante de A con autovector

$$\vec{u_1} = (u_1, u_2, \ldots, u_k)^t$$

el porcentaje de individuos en el grupo j con el paso del tiempo tiende a

$$\frac{u_j}{u_1 + \cdots + u_k} \times 100\,\%\,, \quad j = 1, 2, \ldots, k\,.$$

Ejercicio 6. Una población de individuos está distribuida en dos grupos de edad, jóvenes y adultos. Cada año un individuo joven produce, en promedio, 1,5 nuevos jóvenes, y un individuo adulto produce, en promedio, 2 nuevos jóvenes. Por otro lado, solo el 8 % de los jóvenes sobrevive y pasa a ser adulto, mientras que todos los individuos adultos han muerto al finalizar el segundo año. Inicialmente hay 100 jovenes y 100 adultos.

a) Escribe el modelo matricial de la dinámica de esta población.
b) ¿Cuántos pájaros hay en cada grupo después de tres años?
c)¿Cuál es la tasa de variación de cada grupo de edad con el paso del tiempo?
d) ¿Cómo se distribuye la población con el paso del tiempo?

Ejercicio 7. Una colonia de perdices vive en dos ecosistemas X e Y. Inicialmente hay 1500 perdices en X y 500 en Y. Cada mes el 5 % de las perdices de X migra a Y y a su vez el 5 % de las perdices de Y migra a X.

a) Escribe las ecuaciones de la evolución del número de perdices en cada ecosistema.
b)¿Qué cantidad de perdices habrá en cada ecosistema después de 1 año?
c) ¿Qué cantidad de perdices habrá en cada ecosistema con el paso del tiempo?

Ejercicio 8. Una explotación forestal. En un bosque maderero los árboles están clasificados en tres tamaños: pequeños, medianos y grandes.
Cada año un 50 % de los árboles pequeños pasan a ser medianos y un 25 % de los árboles medianos pasan a ser grandes.
Cada año se corta el 20 % de los árboles grandes para su venta, a la vez que se repuebla con la misma cantidad de árboles de tamaño pequeño.

a) Escribe la matriz de transición de este sistema.
b) Si se comienza la explotación forestal plantando 1000 árboles pqueños, ¿cuál será la distribución de árboles en el cuarto año?
c) ¿Se estabiliza la proporción de árboles con el paso del tiempo? ¿Cómo?

Ejercicio 9. Cultivo de plantas. Rasgos genéticos heredados. En un vivero hay 1000 flores rojas (genotipo AA), 1000 flores rosas (genotipo Aa) y 1000 flores blancas (genotipo aa) de una determinada especie. Solo se fertiliza cada planta con las de su genotipo. Todas las flores mueren o son cortadas después de cada periodo de fertilización.

a) Escribe un sistema que describa la proporción de flores de cada color después de cada periodo de fertilización.
b) ¿Cuál será la distribución de las flores con el paso del tiempo?
c) ¿Cuántos periodos de fertilización pasarán antes de que desaparezcan las plantas de flores rosas?