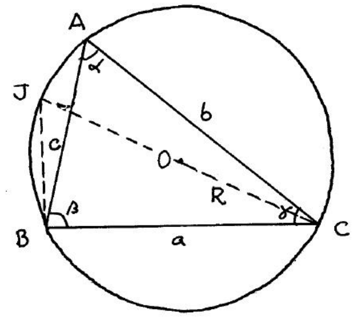
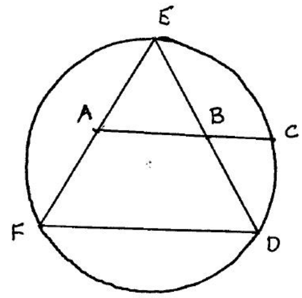
Máster en Formación de profesorado de Secundaria Obligatoria y Bachillerato.
Curso 2016-17

Complementos para la formación disciplinar en Matemáticas

HOJA DE PROBLEMAS: Geometría II
(Para entregar el 21 de febrero de 2017)



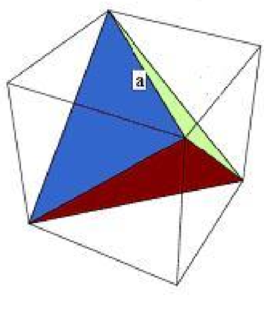
1. (Ley del seno) Para un triángulo ABC inscrito en una circunferencia de radio R se tiene
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R\,.$$
(Indicación: trazar el diámetro CJ y la cuerda BJ como en la figura)



2. Sean A y B los puntos medios de los lados EF y ED de un triángulo equilátero DEF inscrito en una circunferencia. Extiende AB hasta cortar a la circunferencia en C. Demostrar que B divide a AC según el número de oro, es decir
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \phi\,.$$
Sugerencia: Prolongar el segmento AB hacia la izquierda hasta cortar a la circunferencia en un punto C'.Demostrar que los triángulos $C'EB$ y DBC son semejantes.

3. i) Hallar los valores de $\mathrm{sen}(\frac{\pi}{8}), \cos(\frac{\pi}{8})$ y $\mathrm{tg}(\frac{\pi}{8})$ a partir de las razones trigonométricas de un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radianes.
ii) Hallar las áreas de un octógono regular inscrito y otro circunscrito a un círculo de radio 1.

4. Un tetraedro regular cuya arista tiene longitud a se coloca dentro de un cubo como en la figura, dejando vacío un espacio ocupado por cuatro tetraedros. Utiliza este puzle para hallar el volumen del tetraedro regular en función de la longitud a de su lado.



5. Demuestra que el volumen de un octaedro regular de lado ℓ es $\dfrac{\sqrt{2}}{3}\ell^3$.

6. (1,5 puntos) En todo poliedro regular exite un único punto, llamado **centro**, que equidista de todas sus caras, y que es el centro de la esfera inscrita en el poliedro regular. La longitud del radio de esta esfera se llama **apotema** del poliedro. Todo poliedro regular se puede descomponer en unión disjunta de pirámides iguales cuya altura es la apotema.

   Sabiendo que la apotema de un icosaedro regular cuyas aristas tienen logitud ℓ es $a = \frac{\ell}{2}\frac{\Phi^2}{\sqrt{3}}$, prueba que el volumen de un icosaedro regular es $V = \frac{5}{6}\Phi^2\ell^3$.

7. A partir de la estructura verticial dada halla en cada uno de los siguientes casos el número de caras de cada tipo del poliedro considerado, el número de vértices y el de aristas:

   a) Cuboctaedro truncado (estructura verticial: $4-6-8$).

   b) Icosidodecaedro (estructura verticial: $3-5-3-5$).

   c) Icosidodecaedro truncado (estructura verticial: $4-6-10$).

8. Supongamos que en cada vértice de un poliedro semirregular se juntan un cuadrado, un hexágono y un polígono regular de p lados, siendo $p > 6$. Probar que solo se puede tener $p = 8$ o $p = 10$. Mirando la tabla proporcionada en clase, indicar el nombre de cada uno de estos poliedros semirregulares.

9. Supongamos que en cada vértice de un poliedro semirregular se juntan un triángulo, dos cuadrados y un polígono regular de p lados, siendo $p > 4$. Probar que $p = 8$ e indicar el nombre de este semirregular.

10. (Repaso rápido de integración) Una semicircunferencia de radio R es la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ en el intervalo $-R \le x \le R$.

    i) Hallar el área de un círculo de radio R con la fórmula $A = \displaystyle\int_{-R}^{R} |f(x)|\, dx$.

    ii) Hallar la longitud de una circunferencia de radio R con la fórmula $L = \displaystyle\int_{-R}^{R} \sqrt{1 + |f'(x)|^2}\, dx$.

    iii) Hallar el volumen de una esfera de radio R con la fórmula $V = \pi \displaystyle\int_{-R}^{R} |f(x)|^2\, dx$.

    iv) Hallar el volumen de una esfera de radio R con la fórmula $L = 2\pi \displaystyle\int_{-R}^{R} |f(x)|\sqrt{1 + |f'(x)|^2}\, dx$.