Hoja 2: Funciones, límites y continuidad.

Observaciones: A menos que se diga lo contrario, $\log x$ será el logaritmo neperiano de x. La parte entera de x (es decir, el mayor entero $n \leq x$) se denota mediante $[x] = n$. Los apartados que llevan el indicativo * son ejercicios de carácter complementario.

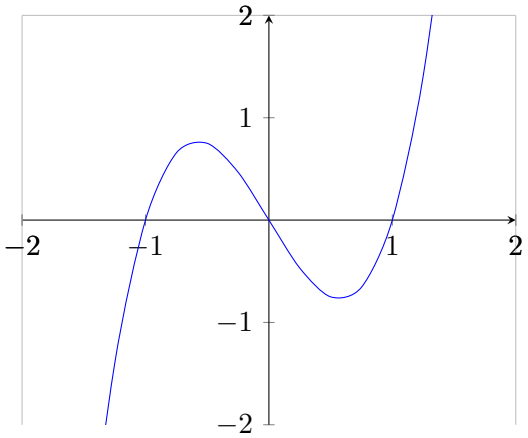
1.- Encuentra el dominio de las siguientes funciones:

$$(a) \quad f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}, \qquad (b) \quad f(x) = \sqrt{x^2 - 1},$$

$$(c^*) \quad f(x) = \frac{1}{x - \sqrt{1 - x^2}}, \qquad (d) \quad f(x) = \frac{1}{1 - \log x},$$

$$(e^*) \quad f(x) = \frac{\sqrt{5 - x}}{\log x}, \qquad (f) \quad f(x) = \log(x - x^2).$$

2.- Sea $f(x)$ una función cuya gráfica es la siguiente:



a) Dibujar la gráfica de $g(x) = f(x + 2)$.
b) Dibujar la gráfica de $h(x) = f(x) - 1$.
c) Dibujar la gráfica de $j(x) = f(|x|)$.
d) Dibujar la gráfica de $k(x) = |f(x)|$.
e) Dibujar la gráfica de $l(x) = f(2x)$.
f) Dibujar la gráfica de $m(x) = f(1/x)$.

3.- Estudia la simetría de las siguientes funciones:

$$(a) \quad f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}, \qquad (b) \quad f(x) = \sqrt{1 - x^2},$$

$$(c) \quad f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}, \qquad (d) \quad f(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \cos x.$$

4.- Si f y g son dos funciones impares, ¿cómo son $f + g$, $f \cdot g$ y $f \circ g$? ¿Y si f es par y g impar?

5.- Consideramos las funciones:

$$f(x) = \cos x\,, \quad g(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [-1, 1] \\ x, & \text{si } x \notin [-1, 1]. \end{cases}$$

a) Calcular $f \circ g$.
b) Calcular $g \circ f$.

6.- Estudia cuáles de las siguientes funciones son inyectivas, hallando su inversa en caso de que lo sean o, en caso contrario, un ejemplo de dos puntos con la misma imagen.

$(a)\quad f(x) = 7x - 4,$ $\qquad (b)\quad f(x) = \operatorname{sen}(7x-4),$

$(c^*)\quad f(x) = (x+1)^3 + 2,$ $\qquad (d^*)\quad f(x) = \dfrac{x+2}{x+1},$

$(e^*)\quad f(x) = x^2 - 3x + 2,$ $\qquad (f^*)\quad f(x) = \dfrac{x}{x^2+1},$

$(g)\quad f(x) = \mathrm{e}^{-x},$ $\qquad (h)\quad f(x) = \log(x+1).$

7.- Esboza, con los mínimos cálculos posibles, la gráfica de las siguientes funciones:

$(a)\quad f(x) = (x+2)^2 - 1,$ $\qquad (b)\quad f(x) = \sqrt{4-x},$

$(c)\quad f(x) = \operatorname{mín}\{x, x^2\},$ $\qquad (d^*)\quad f(x) = x^2 + 1/x,$

$(e^*)\quad f(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x},$ $\qquad (f)\quad f(x) = |\mathrm{e}^x - 1|,$

$(g^*)\quad f(x) = |x^2 - 1|,$ $\qquad (h^*)\quad f(x) = [x]$

8.- Calcula los siguientes límites simplificando los factores comunes que puedan aparecer:

$(a)\quad \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{x^2-4},$ $\qquad (b^*)\quad \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{3-\sqrt{x^2+8}},$

$(c)\quad \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2},$ $\qquad (d^*)\quad \lim\limits_{x\to -1} \left(\dfrac{3}{x+1} - \dfrac{12}{x^2+6x+5}\right),$

$(e)\quad \lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-1} - \dfrac{2}{x-1}\right),$ $\qquad (f^*)\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}.$

9.- Discutir la existencia de los límites siguientes y calcular su valor si es posible:

$(a)\quad \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+4x-7}{7x^2-\sqrt{2x^6+x^5}},$ $\qquad (b^*)\quad \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(3x^2-1)^2(x+7)^3}{x^7+6},$

$(c)\quad \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+5}}{x^2-7},$ $\qquad (d)\quad \lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+4x} - x\right),$

$(e)\quad \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1},$ $\qquad (f)\quad \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1},$

$(g^*)\quad \lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{1/x},$ $\qquad (h^*)\quad \lim\limits_{x\to 0^-} \mathrm{e}^{1/x},$

$(i^*)\quad \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-\mathrm{e}^{1/x}}{1+\mathrm{e}^{1/x}},$ $\qquad (j)\quad \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1-\mathrm{e}^{1/x}}{1+\mathrm{e}^{1/x}},$

$(k^*)\quad \lim_{x\to 2^-} \frac{x}{x^2-4},$ $\qquad (l^*)\quad \lim_{x\to 1} \frac{|x-1|}{x-1}$

10.- Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

$$(a) \quad f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}, \qquad (b^*) \quad f(x) = x - [x],$$

$$(c) \quad f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-5x} + \cos x}{x^2 - 8x + 12}, \qquad (d) \quad f(x) = \mathrm{e}^{3/x} + x^3 - 9,$$

$$(e^*) \quad f(x) = x^3 \operatorname{tg}(3x + 2), \qquad (f) \quad f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6},$$

$$(g) \quad f(x) = (\log(x - 2))^3, \qquad (h^*) \quad f(x) = (x - 5)\log(8x - 3),$$

$$\text{(i)} \ f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \in [a-1, a), \\ x + a & \text{si} \quad x \in [a, a+1]. \end{cases} \qquad \text{(j)} \ f(x) = \begin{cases} -|\operatorname{sen} x| - 4 & \text{si} \quad x < \pi, \\ |\cos x| - 5 & \text{si} \quad x \geq \pi. \end{cases}$$

11.- Estudiar si hay algún valor de k para el que la siguiente función sea continua en $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} + 2 & \text{si} \quad x \neq 0, \\ k & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$