Matrices, determinantes y autovalores. Aplicaciones a la dinámica de poblaciones. Parte 2.

En la sección anterior clasificamos los sistemas como compatibles determinados, compatibles indeterminados e incompatibles, y vimos cómo el carácter de un sistema estaba escondido en el valor de su determinante. El resultado fundamental dice que **si el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero, entonces el sistema es compatible determinado, y por tanto tiene solución única.**

En particular, si tenemos un sistema **compatible determinado** y el lado derecho es 0, entonces sólo puede tener la solución trivial: puesto que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

entonces necesariamente

$$\begin{array}{ll} x+2y+z & =0 \\ 3x-y+z & =0 \\ x+3y-z & =0 \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x & =0, \\ y & =0, \\ z & =0. \end{array} \right.$$

Nos va a interesar entender este resultado en el otro sentido: si tenemos un sistema con lado derecho 0 y sabemos que tiene alguna solución distinta de la trivial (por tanto tiene más de una solución, de manera que tiene que ser compatible **indeterminado**), entonces el determinante de la matriz de los coeficientes debe ser necesariamente 0.

Aplicación. Volvamos a nuestro ejemplo inicial, con el problema de Fibonacci. La matriz asociada era

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y habíamos observado que al iterar el proceso, el cociente $P_N = A_N/J_N$ parecía aproximarse a un número fijo cuando N era suficientemente grande, independientemente de los datos iniciales.
Por tanto, podemos suponer que para N grande,

$$\frac{A_N}{J_N} \approx \frac{A_{N+1}}{J_{N+1}}$$

Supongamos que N es tan grande que el error cometido en la cuenta anterior es insignificante, de manera que vamos a escribir

$$\frac{A_N}{J_N} = \frac{A_{N+1}}{J_{N+1}}$$

En particular, operando con las fracciones esto significa

$$\frac{J_{N+1}}{J_N} = \frac{A_N}{A_{N+1}}$$

Dicho de otro modo: existe un número λ tal que

$$\begin{pmatrix} J_{N+1} \\ A_{N+1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} J_N \\ A_N \end{pmatrix}$$

Pero por otro lado, la evolución del sistema viene marcada por la matriz, de manera que

$$\begin{pmatrix} J_{N+1} \\ A_{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_N \\ A_N \end{pmatrix}$$

de manera que, poniendo todo junto, obtenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_N \\ A_N \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} J_N \\ A_N \end{pmatrix}$$

o bien, escrito de otro modo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_N \\ A_N \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_N \\ A_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto significa que el sistema cuya matriz de coeficientes es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

y lado derecho $(0,0)$, tiene **otras soluciones distintas de la trivial**. Por tanto, es compatible indeterminado, y esto implica que

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Esto implica una restricción para los valores de λ: calculando el determinante, resulta

$$(-\lambda) \cdot (1-\lambda) - 1 = 0.$$

Es decir,

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$

De donde podemos despejar:

$$\lambda_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Observación: $\lambda_+ = 1,6180$. La constante límite está escondida en estos números asociados a la matriz de coeficientes.

Autovalores y Autovectores

Dada una matriz cuadrada $N \times N$ que denotaremos por A,

- Diremos que λ es un autovalor de la matriz A, si $det(A - \lambda I_N) = 0$.
- Diremos que $\vec{v}$ es un autovector asociado al autovalor λ, si $(A - \lambda I_N)\vec{v} = \vec{0}$. (Lo que es lo mismo que decir $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$.)
- Diremos que un autovector $\vec{v}$ está **normalizado** si la suma de sus componentes es igual a 1. (Comprobar que si $\vec{v}$ es un autovector, entonces también lo es $T\vec{v}$ para cualquier valor de T).

Ejemplo. Consideramos la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Paso 1. Cálculo de los autovalores. Resolvemos el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - 10 = \ldots = \lambda^2 - 5\lambda - 6.$$

Resolviendo la ecuación $\lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0$ obtenemos los autovalores

$$\lambda_\pm = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2},$$

de manera que $\lambda_+ = 6$, $\lambda_- = -1$.
Paso 2. Cálculo de los autovectores. Para calcular el autovector asociado a λ_+ tenemos que encontrar las soluciones no triviales del sistema con lado derecho 0 y matriz de coeficientes

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} - 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

es decir

$$\begin{aligned} -5x + 2y &= 0 \\ 5x - 2y &= 0 \end{aligned}$$

Como debía suceder, hemos obtenido un sistema compatible indeterminado, cuyas soluciones son de la forma $x = (2y)/5$. Es decir, cualquier vector de la forma

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{2t}{5} \\ t \end{pmatrix}$$

será un autovector asociado a $\lambda_+ = 6$. Por ejemplo, si queremos tomar el autovector **normalizado**, basta con elegir t de manera que $\frac{2t}{5} + t = 1$; es decir, $t = 5/7$.

Ejercicio 4. Para la matriz del ejemplo anterior, calcular los autovectores asociados al autovalor $\lambda_- = -1$, y encontrar el autovector normalizado.

Ejercicio 5. Hallar los autovalores y autovectores asociados para la matriz

$$\begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 0,8 & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicación: Dinámica de Poblaciones y Matrices de Leslie.

En esta sección vamos a aplicar los resultados anteriores a problemas que surgen en el estudio de la dinámica de poblaciones. En realidad, el ejemplo inicial de todo este tema, con el problema de Fibonacci, es un ejemplo idealizado de un caso de dinámica de poblaciones; vamos a intentar aplicar nuestra teoría a modelos más realistas, para interpretar en la práctica el significado de los números obtenidos.
Un ejemplo más próximo a la realidad sería el siguiente:

Ejemplo. En cierta especie animal, las hembras se dividen en juveniles (hasta 1 año de edad) y adultas (de más de 1 año de edad). Solamente el 30% de las hembras jóvenes sobreviven cada año y pasan a adultas. Mientras son jóvenes, no tienen capacidad de reproducción. Además, el 50% de las hembras adultas sobreviven al año siguiente, y cada hembra adulta tiene una descendencia media de 2 hembras cada año.
Queremos estudiar:

- ¿Cómo evoluciona la población si suponemos que inicialmente hay 10 hembras adultas y ninguna joven?
- A largo plazo, qué proporción del total de la población será joven?

La clave del modelo es que estamos asumiendo que cada unidad de tiempo que pasa, el número de individuos de cada clase de edad varía un porcentaje fijo. Esto nos permite realizar una representación matricial como la que hicimos en el problema de Fibonacci.

Nota: La matriz asociada al problema recibe el nombre de matriz de evolución del sistema, matriz de transición o matriz de Leslie en honor del matemático Patrick Leslie quien las introdujo en 1945 para el estudio de la evolución de poblaciones estructuradas en edades.

En este caso, si denotamos por J_N el número de hembras jóvenes en el año N, y por A_N el número de hembras adultas en el año N, tenemos:

$$\begin{aligned} J_N &= 2A_{N-1} \\ A_N &= 0,3J_{N-1} + 0,5A_{N-1} \end{aligned}$$

lo que escrito en forma matricial resulta

$$\begin{pmatrix} J_N \\ A_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{N-1} \\ A_{N-1} \end{pmatrix}$$

por lo que, teniendo en cuenta el dato inicial,

$$\begin{pmatrix} J_1 \\ A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} J_2 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix},$$

y en general,

$$\begin{pmatrix} J_N \\ A_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}^N \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix},$$

En cuanto al comportamiento a largo plazo, el **resultado clave** es el siguiente:

Teorema. La evolución a largo plazo del sistema viene determinada por el **autovalor dominante** $\lambda_D = \max\{|\lambda_+|, |\lambda_-|\}$.

Por tanto, debemos empezar por calcular los autovalores de la matriz de Leslie:

$$0 = \det\left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,3 & 0,5 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 0,3 & 0,5-\lambda \end{vmatrix}$$

Es decir, los autovalores son las soluciones de la ecuación de segundo grado:

$$\lambda^2 - 0,5\lambda - 0,6 = 0,$$

de manera que

$$\lambda_+ = \frac{0,5 + \sqrt{0,25 + 2,4}}{2} \approx 1,0639\,;\ \lambda_- = \frac{0,5 - \sqrt{0,25 + 2,4}}{2} \approx -0,5639.$$

Una vez identificado el autovalor dominante, $\lambda_D = \lambda_+ = \dfrac{0,5 + \sqrt{2,65}}{2}$, calculamos el autovector asociado, es decir, resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} -\lambda_D & 2 \\ 0,3 & 0,5-\lambda_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es decir

$$\begin{cases} -\lambda_D u + 2v &= 0 \\ 0,3u + (0,5-\lambda_D)v &= 0 \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que λ_D es uno de los autovalores, el sistema ha de ser **compatible indeterminado**, y va a tener infinitas soluciones que cumplen la condición

$$v = \frac{\lambda_D}{2} u = \frac{0,5 + \sqrt{2,65}}{4} u.$$

Ejercicio: Comprobar que despejando en la segunda ecuación, obtenemos lo mismo.

Por tanto, los autovectores asociados al autovalor dominante son de la forma

$$\begin{pmatrix} u \\ \dfrac{0,5 + \sqrt{2,65}}{4} u \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} u \\ 0,532u \end{pmatrix}$$

y si elegimos u para que la suma de las componentes valga 1, obtenemos el autovector normalizado

$$\begin{pmatrix} \dfrac{4}{4,5 + \sqrt{2,65}} \\ \dfrac{0,5 + \sqrt{2,65}}{4,5 + \sqrt{2,65}} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,65275 \\ 0,34725 \end{pmatrix}$$

Importante: Las dos componentes de este autovector normalizado representan las proporciones de cada una de las dos clases de edad que tendremos a largo plazo.

En este ejemplo concreto, las conclusiones que podemos extraer a partir de los resultados anteriores son:

- A partir del autovalor dominante, podemos decir que, a largo plazo, cada grupo de edad multiplica su población por un factor $\lambda_D \approx 1,0639$ cada año.
- A partir del autovector normalizado correspondiente al autovalor dominante, podemos concluir que a largo plazo, del total de la población el $65,27\%$ corresponderá a individuos de la primera clase de edad (jóvenes) y el $34,72\%$ corresponderá a individuos de la segunda clase de edad (adultos).

Resumen:

- El crecimiento a largo pazo de la población queda determinado por el autovalor dominante. Si es mayor que 1, asintóticamente la población tiende a infinito , y si es menor que 1, la población tiende a extinguirse.
- La proporción de individuos en cada una de las clases de edad a largo plazo, coincide con las componentes de un autovector correspondiente al autovalor dominante, a condición de que estas componentes sumen 1 (autovector normalizado).
- Si calculamos los autovectores correspondientes al autovalor no dominante, obtendremos siempre alguna componente negativa, lo que nos llevaría a un resultado carente de sentido a largo plazo, pues una población no puede tener valores negativos.
- En otros modelos distintos de la dinámica de poblaciones, en los que los resultados negativos pueden tener sentido, es posible que el autovalor dominante (el de mayor valor absoluto) sea negativo. En este caso, si su valor absoluto es menor que 1, las soluciones a largo plazo tienden a $(0,0)$, y si su valor absoluto es mayor que 1 tienden a explotar, pero oscilando entre $-\infty$ y $+\infty$.

En general, un problema de dinámica de poblaciones puede presentar más de dos clases de edad, lo que nos lleva a matrices y sistemas de ecuaciones más grandes.
Por ejemplo, supongamos el siguiente problema:

Ejemplo
Supongamos que las hembras de determinada especie se pueden agrupar en las siguientes categorías:

- Grupo 1. Las nacidas durante el año. Denotaremos la población de este grupo en el año N por A_N.

- Grupo 2. Las que tienen más de un año pero menos de dos. Las denotaremos por B_N.
- Grupo 3. Las que tienen más de dos años pero menos de tres. Las denotaremos por C_N.
- Grupo 4. Las que tienen más de tres años pero menos de cuatro. Las denotaremos por D_N.

Y supongamos que la evolución del sistema sigue las reglas siguientes:

- Suponemos que no pueden sobrevivir más de cuatro años (salvo casos tan excepcionales que no tienen valor numérico significativo).
- Las hembras del grupo 1 no tienen capacidad de reproducción y sobrevivirá un 40% para el año siguiente.
- Las hembras del grupo 2 tienen una tasa de supervivencia del 30% anual, y cada una de ellas producirá en promedio 2 hembras al año.
- Las hembras del grupo 3 tienen una tasa de supervivencia del 10% anual, y cada una de ellas producirá en promedio 1,5 hembras al año.
- Las hembras del grupo 4 no sobreviven y tampoco se reproducen.

De acuerdo con estas reglas, la evolución del sistema será la siguiente:

$$\begin{aligned} A_N &= 2B_{N-1} + 1,5C_{N-1} \\ B_N &= 0,4A_{N-1} \\ C_N &= 0,3B_{N-1} \\ D_N &= 0,1C_{N-1} \end{aligned}$$

lo que nos lleva a la formulación matricial:

$$\begin{pmatrix} A_N \\ B_N \\ C_N \\ D_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1,5 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{N-1} \\ B_{N-1} \\ C_{N-1} \\ D_{N-1} \end{pmatrix}$$

La teoría es exactamente la misma que la de dimensión 2: para ver la evolución a largo plazo habría que calcular los autovalores de la matriz de Leslie, encontrar el autovalor dominante, y hallar el autovector asociado. Toda la información relativa al comportamiento a largo plazo estaría resumida en estos números.
El problema es que para esto tenemos que calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 1,5 & 0 \\ 0,4 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

igualarlo a 0 y hallar los valores de las raíces λ correspondientes.

Haciendo los cálculos, llegamos a la ecuación

$$0 = \lambda(\lambda^3 - 0,8\lambda - 0,18)$$

Puesto que, salvo $\lambda = 0$ no hay ninguna otra raíz evidente a primera vista, deberíamos recurrir a algún programa de cálculo numérico para encontrar el resto de soluciones. Por ejemplo, usando la herramienta www.wolframalpha.com, con la sintaxis "solve $x^3 - (0.8)x - (0.18)$", obtenemos las soluciones $-0,747876$, $-0,242918$, $0,99079$. Por tanto, el autovalor dominante es (aproximadamente) $0,99079$.
Para el cálculo del autovector asociado, nuevamente nos encontramos con cálculos bastante tediosos, por lo que podemos volver a recurrir al programa anterior. En este caso la sintaxis sería: "eigenvectors $\{\{0, 2, 1.5, 0\}, \{0.4, 0, 0, 0\}, \{0, 0.3, 0, 0\}, \{0, 0, 0.1, 0\}\}$".
Concretamente, el resultado que obtenemos para el autovector asociado al autovalor dominante, una vez normalizado, es

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0,650070 \\ 0,262444 \\ 0,079464 \\ 0,008020 \end{pmatrix}$$

de manera que cuando haya transcurrido mucho tiempo, el porcentaje esperado de hembras de menos de 1 año será aproximadamente del 65%, de hembras entre 1 y 2 años del $26,24\%$, entre 2 y 3 años del $7,94\%$, y de más de 3 años del 0.80%.
Por otro lado, al haber obtenido un autovalor dominante tan próximo a 1, es arriesgado intentar extraer conclusiones sobre la extinción o crecimiento exponencial de la población, pues habría que tener en cuenta los pequeños errores a la hora de calcular los coeficientes del sistema, o la variación de éstos a lo largo de los años por la influencia de las condiciones ambientales. Con este resultado, la interpretación más razonable es que la población total se mantendrá bastante estable mientras no cambien drásticamente las condiciones.

Ejercicio 6. Las hembras de una población se clasifican en dos grupos de edad (hembras jóvenes y hembras adultas). La matriz de transición que describe la evolución de esta población es la siguiente:

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0,11 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) ¿Cual es la proporción de hembras jóvenes que consiguen llegar al estado adulto? ¿Cual es la natalidad en cada uno de los grupos de edad?

(b) Si inicialmente hay 100 hembras de cada clase, ¿cuántas habrá en el siguiente período de tiempo?

(c) A largo plazo, ¿cuál será la tasa de variación de cada uno de los grupos? ¿Se extinguirá la población?

(d) A largo plazo, ¿cuál será la proporción de hembras jóvenes y adultas?

Ejercicio 7. En cierta especie animal, las hembras se clasifican en *juveniles* (hasta 1 año de edad) y *adultas* (de 1 a 2 años de edad).
Solamente el 40% de las hembras jóvenes sobreviven cada año y pasan a adultas. Todavía no tienen capacidad de reproducción.
Las hembras adultas no sobreviven al año siguiente, y tienen una descendencia media de 1,6 hembras cada año.
(a) Construye la matriz correspondiente a este modelo de evolución.
(b) Calcula la tasa de crecimiento o decrecimiento a largo plazo.
(c) Calcula la proporción aproximada de hembras jóvenes que formarán parte de la población a largo plazo.

Ejercicio 8. Se lleva a cabo un estudio sobre una población de ballenas azules. Las hembras son clasificadas en cuatro grupos de edad, y sobre cada grupo se obtiene la siguiente información en términos de fertilidad (número medio de crías hembras en cada período) y en terminos de mortalidad:

GRUPO DE EDAD:	0 a 3	4 a 7	8 a 11	12 a 15
NO. MEDIO DE CRÍAS:	0	0'63	1'00	0'90
MORTALIDAD:	43%	43%	43%	100%

Formula un modelo matricial para la evolución de esta población. Si en un determinado momento, la población está formada por 20, 30, 40 y 20 ballenas hembra de cada tipo de edad, ¿cuál será la composición de la población (aproximadamente) al cabo de dos períodos de tiempo?

Ejercicio 9. En una granja de cría de cerdos, los animales son clasificados según sus edades de la siguiente forma:

- Cochinillos: De 0 a 1 año.
- Lechones: De 1 a 2 años.
- Jóvenes: De 2 a 3 años.
- Adultos: De 3 a 4 años.

El procedimiento de gestión de las hembras de la granja es el siguiente:

- Se sacrifica al 60% de las que van naciendo para su consumo como cochinillos.
- Se sacrifica para su consumo a todas las hembras cuando llegan a los 4 años. No se sacrifica a ninguna de las demás, y se supone que ningún animal muere por otras causas.
- Se dedica a todas las hembras jóvenes y adultas a la cría. Se sabe que, en media, cada hembra joven tendrá 0,5 camadas de 5 cochinillos, cada hembra adulta tendrá 0,8 camadas de 5 cochinillos, y que el 50% de todos los nuevos nacidos serán hembras.

Formula el modelo apropiado para describir la evolución de la población.

Ejercicio 10. La población de cierta especie de animales en un bosque está dividida en dos grupos de edad (jóvenes y adultos). La correspondiente matriz de Leslie es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Interpreta el significado de cada uno de los elementos de la matriz anterior.

b) Calcula el autovalor dominante de A y un autovector asociado.

c) Sea $X(k)$ el número de animales de cada grupo en la etapa k. Si en la etapa 0 hay únicamente 10 animales jóvenes en el bosque, calcula $X(1), X(2), X(3)$ y $X(4)$. A partir de $X(4)$ calcula la proporción exacta de individuos de cada grupo respecto al total de la población en la etapa 4.

d) Calcula la misma proporción de forma aproximada mediante el autovector asociado al autovalor dominante, y compara el resultado obtenido en este apartado con el del apartado anterior.

Ejercicio 11. Supongamos que

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 1 \\ 0.6 & 0 \end{pmatrix}$$

es la matriz de transición de una población de venados hembras, dividida para su estudio en jóvenes y adultas.

a) Demostrar que, a la larga, el tamaño de la población se multiplicará por un factor aproximado de 1.27 (es decir, crecerá un 27%) cada generación.

b) Los granjeros y otras personas del área no quieren que la población crezca, y deciden poner en marcha una caza controlada. Si se decide cazar una proporción h de los venados jóvenes antes de que pasen a adultos, ¿cuál será ahora la matriz de transición?

c) Prueba que $h = 0.8$ es una caza demasiado intensiva, es decir, la población de venados se extinguiría.

d) ¿Es posible seleccionar h de manera que la población de venados no crezca ni desaparezca? ¿Cuál sería ese valor de h?

Ejercicio 12. En dos reservas en las que está prohibida la caza, las autoridades encargan un estudio de la población de hembras de jabalí. En el estudio, se realiza durante años un censo en ambas reservas, contando la población de ejemplares menores de un año (jóvenes, sin capacidad de reproducción), y también la población de ejemplares mayores de un año (adultos, que ya pueden reproducirse), concluyendo que:
• En la primera reserva cada ejemplar adulto da lugar, en promedio, a $1,5$ nuevos ejemplares (jóvenes) cada año. Además, se estima que sobrevivirán un año más el 10% de los ejemplares que están censados como jóvenes, y el 80% de los adultos.

• En la segunda reserva cada ejemplar adulto da lugar, en promedio, a $1,2$ nuevos ejemplares (jóvenes) cada año. Además se estima que sobrevivirán un año más el 50% de los ejemplares que están censados como jóvenes, y el 70% de los adultos.

a) ¿Cuál de las dos reservas es la elegida para comenzar a permitir la caza de algunos ejemplares sin riesgo de extinguir la población?
b) En la reserva correcta, se decide permitir una cacería de ejemplares adultos justo antes de cada nuevo censo. Así, el porcentaje de supervivencia de adultos, contando tanto las condiciones naturales como el efecto de la caza, pasará a ser menor de lo que era originalmente y los otros datos permanecerán igual. Si se quiere que a largo plazo la población permanezca estable, ¿cuál debe ser el nuevo porcentaje de supervivencia de adultos?
c) Tras realizarse durante muchos años la caza en la reserva determinada en el apartado a), al ritmo adecuado para que se den las condiciones del apartado b), ¿qué porcentaje aproximado del total de la población será joven?

Ejercicio 13. Supongamos que en un granja la población de animales hembras está dividida en dos clases de edad: jóvenes y adultas. Al finalizar cada periodo anual se sacrifica a todas las adultas y al 50% de las jóvenes (el otro 50% pasa a tener la consideración de adultas). El número medio anual de crías hembras de las jóvenes es 1 y el de las adultas es $1,5$.
(a) Construye la matriz de Leslie correspondiente a este modelo de población.
(b) Sabiendo que inicialmente había 100 individuos hembras de cada clase, calcula el número de hembras de cada clase al cabo de uno y dos años.
(c) Calcula la tasa de crecimiento o decrecimiento a largo plazo. ¿Se extinguirá la población?
(d) Calcula la proporción aproximada de hembras de cada clase a largo plazo.

Ejercicio 14. En cierta especie animal las hembras se clasifican en *jóvenes* (hasta 1 año de edad) y *adultas* (de 1 a 2 años de edad). Solamente el 27% de las hembras jóvenes sobreviven cada año y pasan a adultas. Las hembras jóvenes tienen una descendencia media de 2.4 hembras cada año. Las hembras adultas no sobreviven al año siguiente y tienen una descendencia media de 3 hembras cada año.

(a) Sabiendo que inicialmente había 100 individuos hembras de cada clase, calcula el número de hembras de cada clase al cabo de uno y dos años.

(b) Calcular la tasa de crecimiento o decrecimiento a largo plazo. ¿Se extinguirá la población?

(c) Calcular la proporción aproximada de hembras de cada clase a largo plazo.