Álgebra y Cálculo — Curso 2013-2014.
Primero de Ciencias de la Alimentación

Matrices, determinantes y autovalores. Aplicaciones a la dinámica de poblaciones. Parte 1.

Ejemplo 1: Sucesión de Fibonacci. Empezamos con un ejemplo clásico, que aparece en el libro titulado "Liber Abaci", publicado hacia 1.202 por Leonardo Pisano *Fibonacci*. Supongamos que vamos al mercado y compramos 4 parejas de conejos jóvenes, que comienzan a crecer y reproducirse de acuerdo con las reglas siguientes:

- Las parejas jóvenes se convierten en parejas adultas al cumplir 1 mes de vida.
- Las parejas adultas producen nuevas crías, a razón de una nueva pareja cada mes.
- Suponemos que no hay mortalidad, ni entre las parejas jóvenes ni entre las adultas.

De acuerdo con estas reglas, si denotamos por J_N el número de parejas jóvenes en el mes N, y por A_N el número de parejas adultas en el mes N, obtenemos el sistema:

$$\begin{aligned} J_N &= A_{N-1} \\ A_N &= J_{N-1} + A_{N-1} \end{aligned}$$

(En particular, a partir de las expresiones anteriores es sencillo demostrar que $A_N = A_{N-1} + A_{N-2}$, $J_N = J_{N-1} + J_{N-2}$, pero nosotros no utilizaremos estas fórmulas en lo que sigue.)
De acuerdo con los datos iniciales del problema, $J_0 = 4$, $A_0 = 0$, podemos iterar en el sistema anterior obteniendo los resultados para los distintos meses. Por ejemplo, podemos obtener:

$$\begin{pmatrix} J_7 \\ A_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 52 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} J_{12} \\ A_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 356 \\ 576 \end{pmatrix}$$

En particular, si denotamos por P_N la proporción entre parejas adultas y parejas jóvenes en el mes N, es decir $P_N = A_N/J_N$, obtenemos:

$$P_{10} = 1,6176,\ P_{11} = 1,6181,\ P_{12} = 1,6179$$

es decir, la proporción tiende a estabilizarse cuando N crece.

Ejercicio 1. a) Rellenar un cuadro con los valores de J_N, A_N y P_N para $N = 0, 1, \ldots, 12$, tomando como datos iniciales $J_0 = 4$, $A_0 = 0$.
b) Rellenar el mismo cuadro pero con datos iniciales arbitrarios. Estudiar el comportamiento de P_N en este caso.

Del ejercicio anterior se deduce que hay algo dentro de la proporción P_N que depende exclusivamente de la estructura del problema y no de sus datos iniciales. Para descubrir esta propiedad interna, en las secciones siguientes desarrollaremos y estudiaremos nuevas herramientas matemáticas.

MATRICES

Una matriz $N \times M$ está formada por un conjunto de números dispuestos en forma rectangular, en una tabla de N filas y M columnas. Representa una manera ordenada de almacenar datos. Diremos que $N \times M$ es la dimensión (es fundamental recordar que N se refiere a las filas y M a las columnas), y en el caso particular en que $N = M$ diremos que la matriz es cuadrada.

Ejemplos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4/5 & 6 \end{pmatrix} \text{ es una matriz } 2 \times 3.$$

$$\begin{pmatrix} \pi & 2.3 \\ 3 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ es una matriz cuadrada } 2 \times 2.$$

$$(1\ 2\ 3) \text{ es una matriz } 1 \times 3.$$

Operaciones con matrices

- **Suma de matrices.** Dos matrices **de las mismas dimensiones** se suman sumando sus componentes término a término:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+1 & 3+2 \\ 4+3 & 5+4 & 6+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \end{pmatrix}$$

- **Producto por un número.** El número se multiplica por todas las componentes de la matriz:

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4/5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 15 & 4 & 30 \end{pmatrix}$$

- **Producto de una matriz por un vector columna a la derecha.** Cada fila de la matriz se multiplica término a término por el vector, y el resultado se guarda en la fila correspondiente del resultado:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4/5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 4 + \frac{4}{5} \cdot 5 + 6 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 22 \end{pmatrix}$$

  Importante. Observar que para que el producto se pueda hacer, el tamaño del vector debe coincidir con el número de columnas de la matriz.

- **Producto de dos matrices.** En este caso, se repite el proceso seguido para multiplicar por un vector con cada una de las columnas de la matriz de la derecha. Es decir, supongamos que queremos hacer el producto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4/5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Entonces, operamos de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & \cdot \\ 5 & \cdot \\ 1 & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 4 + 2\cdot 5 + 3\cdot 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & 1 \\ \cdot & 0 \\ \cdot & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & 1\cdot 1 + 2\cdot 0 + 3\cdot 2 \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & 7 \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 3 & 4/5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & \cdot \\ 5 & \cdot \\ 1 & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ 3\cdot 4 + (4/5)\cdot 5 + 6\cdot 1 & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ 22 & \cdot \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 3 & 4/5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & 1 \\ \cdot & 0 \\ \cdot & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & 3\cdot 1 + (4/5)\cdot 0 + 6\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & 15 \end{pmatrix},$$

de manera que, juntándolo todo, resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4/5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 7 \\ 22 & 15 \end{pmatrix}.$$

- **Determinante de una matriz cuadrada.**

En el caso de matrices 2×2, el determinante se define de la manera siguiente:

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

En el caso de matrices 3×3, la definición es la siguiente:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

Iterando este procedimiento, se podría definir el determinante para matrices cuadradas de dimensiones superiores, pero el proceso suele ser largo y las operaciones se complican bastante. En los casos en los que se necesite calcular un determinante de una de estas matrices grandes, es aconsejable recurrir a programas de ordenador.

Importante. En el caso del producto de matrices, las dimensiones tienen que ajustarse para que las cuentas sean posibles: el número de **columnas** de la primera matriz tiene que coincidir con el número de **filas** de la segunda matriz. Es decir, A y B se podrán multiplicar en el orden $A \cdot B$ siempre que la dimensión de A sea $M \times N$ y la dimensión de B sea $N \times K$, obteniendo como resultado una matriz AB de dimensiones $M \times K$. En particular, el producto de matrices no es conmutativo. Por ejemplo, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix},$$

de manera que A tiene dimensión 2×4 y B tiene dimensión 4×3 entonces podremos hacer el producto en el orden $A \cdot B$, obteniendo una matriz 2×3, pero no podremos hacerlo en el orden $B \cdot A$.

Ejemplos. En el caso particular del problema de Fibonacci, las operaciones definidas anteriormente nos permiten escribir el sistema en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} J_N \\ A_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{N-1} \\ J_{N-1} + A_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{N-1} \\ A_{N-1} \end{pmatrix}$$

de manera que las reglas que rigen la evolución del sistema están resumidas en la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por otro lado, en el caso particular $N = 1$, el sistema dice:

$$\begin{aligned} J_1 &= A_0 \\ A_1 &= J_0 + A_0 \end{aligned}$$

y en el caso particular $N = 2$

$$\begin{aligned} J_2 &= A_1 \\ A_2 &= J_1 + A_1 \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de J_1, A_1 hallados previamente en función de los datos iniciales, tenemos

$$\begin{aligned} J_2 &= A_1 = J_0 + A_0 \\ A_2 &= J_0 + (J_0 + A_0) = 2J_0 + A_0 \end{aligned}$$

Lo que escrito en forma matricial resulta:

$$\begin{pmatrix} J_2 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_0 \\ A_0 \end{pmatrix}$$

Pero por otro lado,

$$\begin{pmatrix} J_2 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 \\ A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_0 \\ A_0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} J_0 \\ A_0 \end{pmatrix}$$

Y, de acuerdo con la definición de producto de matrices, es inmediato comprobar que

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

de manera que **la definición que hemos dado de producto matricial es la que se necesita para poder expresar correctamente estos procesos iterativos.**

Ejercicio 2 Realiza las siguientes multiplicaciones de matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \\ 0 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 7 & -3 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3. Calcula la matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tal que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Matriz identidad. Matriz inversa.

En el caso de las matrices cuadradas, juega un papel importante la **matriz identidad**, formada por ceros en todas partes menos en la diagonal principal, en la que se repite el valor 1:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Estas matrices tienen la importante propiedad siguiente: si A es una matriz cuadrada $N \times N$, entonces

$$A \cdot I_N = I_N \cdot A = A.$$

Es decir, la matriz identidad I_N es el elemento neutro del producto de matrices.

Una vez identificada la matriz identidad, si consideramos una matriz cuadrada A, surge de manera natural la pregunta de si existe una **matriz inversa**, que denotaremos por A^{-1}, tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_N$. Y, en el caso afirmativo, encontrar un método para su cálculo.
La respuesta a la primera pregunta se basa en el concepto de **determinante** estudiado antes.

Importante. Una matriz cuadrada A tiene inversa $\Longleftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$.

Método para el cálculo de la matriz inversa.
Consideremos la matriz asociada al ejemplo inicial, del problema de Fibonacci, es decir

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si calculamos su determinante, resulta

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = -1 \neq 0,$$

de manera que podemos calcular su matriz inversa. Supongamos que esta matriz inversa es

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

de manera que tenemos que encontrar los valores de x, y, z, t que cumplen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por la estructura del producto de matrices, esto es equivalente a resolver los dos problemas siguientes:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Es decir, el problema de calcular la matriz inversa se reduce a encontrar las soluciones de dos sistemas de ecuaciones:

$$\begin{aligned} z &= 1 \\ x + z &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} t &= 0 \\ y + t &= 1. \end{aligned}$$

cuya solución es $x = -1$, $y = 1$, $z = 1$, $t = 0$. Por tanto

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{(Comprobar.)}$$

El cálculo de la inversa de una matriz 3×3 nos llevaría a resolver 3 sistemas de ecuaciones, en el caso 4×4 habría que resolver 4 sistemas, etc.

Ejercicio 3.
Determina si la matriz A tiene inversa (si existe inversa, es otra matriz A^{-1} tal que $A \cdot A^{-1} = I$, la matriz identidad) en los casos siguientes:

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -3 & -5 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Sistemas de ecuaciones. El método de Gauss.

En el cálculo de la matriz inversa del apartado anterior, tuvimos que resolver dos sistemas de ecuaciones 2×2. En ese caso tan simple, bastaba con utilizar un método de sustitución, pues los cálculos eran muy sencillos. El método de sustitución se reduce a despejar una de las variables en una de las ecuaciones, y sustituir en las ecuaciones restantes. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ 3x - y + z &= 1 \\ x + 3y - z &= 1 \end{aligned}$$

De la última ecuación podemos deducir $z = x+3y-1$, y sustituyendo en las dos anteriores resulta

$$x + 2y + (x + 3y - 1) = 2, \quad 3x - y + (x + 3y - 1) = 1$$

de manera que, simplificando, llegamos al sistema

$$\begin{aligned} 2x + 5y &= 3 \\ 4x + 2y &= 2 \end{aligned}$$

y a partir de aquí repetiríamos el proceso de despejar y sustituír.

En general, para sistemas de dimensiones superiores las cosas se complican y el método de sustitución es poco eficiente. Una alternativa muy útil en la práctica es el **Método de Gauss.** Este método se basa en el concepto de **sistema equivalente:** dos sistemas son equivalentes si tienen las mismas soluciones. La idea es pasar del sistema original a otro sistema equivalente, que sea más sencillo de resolver. Lo vemos en el ejemplo anterior.

Primero, resumimos la información del sistema en una matriz, que recoja tanto los coeficientes de las ecuaciones como los valores que aparecen en el lado derecho:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

A continuación, pasamos a sistemas equivalentes, haciendo lo que llamaremos **operaciones admisibles**, que son las siguientes:

- Podemos cambiar de orden las **filas** de la matriz.
- Podemos multiplicar una **fila** (todos sus elementos) por el mismo número.
- Podemos sumar dos **filas**.

El objetivo es llegar a un sistema equivalente que sea muy sencillo de resolver. Buscaremos que la matriz resultante tenga la forma

$$\left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array}\right)$$

En efecto, es muy fácil resolver un sistema de esta forma, empezando por la tercera ecuación y siguiendo hacia arriba. En el caso anterior, podríamos seguir los siguientes pasos:
Paso 1. Multiplicar la tercera fila por -1.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Paso 2. Sumar la primera fila a la tercera.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Paso 3. Multiplicamos la fila 1 por -3.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -3 & -6 & -3 & -6 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Paso 4. Sumamos la fila primera a la segunda.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -3 & -6 & -3 & -6 \\ 0 & -7 & -2 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Paso 5. Multiplicamos la fila 3 por -7:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -3 & -6 & -3 & -6 \\ 0 & -7 & -2 & -5 \\ 0 & 7 & -14 & -7 \end{array}\right)$$

Paso 6. Sumamos la fila segunda a la tercera.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -3 & -6 & -3 & -6 \\ 0 & -7 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -16 & -12 \end{array}\right)$$

Una vez encontrada la matriz triangular equivalente, es inmediato encontrar la solución del sistema. **(Comprobar).**

Importante. El proceso anterior no siempre termina con éxito: no todos los sistemas tienen una solución. Hay sistemas que no tienen ninguna solución, y otros que tienen infinitas soluciones. Así, distinguimos tres tipos de sistemas:

- Sistemas **incompatibles**. No nienen ninguna solución.
- Sistemas **compatibles determinados**. Tienen una única solución.
- Sistemas **compatibles indeterminados**. Tienen infinitas soluciones.

De acuerdo con estas definiciones, el sistema que hemos tratado antes sería **compatible determinado**.

Ejemplos.
1. Sistema incompatible.
Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ 3x - y + z &= 1 \\ 4x + y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

que tiene asociada la matriz

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Paso 1: multiplicamos la primera fila por -4:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -4 & -8 & -4 & -8 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Paso 2. Sumamos la fila 1 a la fila 3:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -4 & -8 & -4 & -8 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -2 & -7 \end{array}\right)$$

Paso 3. Multiplicamos la fila 2 por $4/3$:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -4 & -8 & -4 & -8 \\ 4 & -4/3 & 4/3 & 4/3 \\ 0 & -7 & -2 & -7 \end{array}\right)$$

Paso 4. Sumamos la fila 1 a la fila 2:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -4 & -8 & -4 & -8 \\ 0 & -28/3 & -8/3 & -20/3 \\ 0 & -7 & -2 & -7 \end{array}\right)$$

Paso 5. Multiplicar la segunda fila por 3 y la tercera fila por -4:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -4 & -8 & -4 & -8 \\ 0 & -28 & -8 & -20 \\ 0 & 28 & 8 & 28 \end{array}\right)$$

Paso 6. Sumar la fila segunda a la tercera

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -4 & -8 & -4 & -8 \\ 0 & -28 & -8 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right)$$

En este caso llegamos a un sistema en el que la última ecuación es absurda, pues dice

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 8,$$

de manera que no existe ninguna solución.

2. Sistema compatible indeterminado.
Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ 3x - y + z &= 1 \\ 4x + y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

que tiene asociada la matriz

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

Paso 1: multiplicamos la primera fila por -4:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -4 & -8 & -4 & -8 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

Paso 2. Sumamos la fila 1 a la fila 3:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -4 & -8 & -4 & -8 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -2 & -5 \end{array}\right)$$

Paso 3. Multiplicamos la fila 2 por 4/3:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -4 & -8 & -4 & -8 \\ 4 & -4/3 & 4/3 & 4/3 \\ 0 & -7 & -2 & -5 \end{array}\right)$$

Paso 4. Sumamos la fila 1 a la fila 2:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -4 & -8 & -4 & -8 \\ 0 & -28/3 & -8/3 & -20/3 \\ 0 & -7 & -2 & -5 \end{array}\right)$$

Paso 5. Multiplicar la segunda fila por 3 y la tercera fila por -4:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -4 & -8 & -4 & -8 \\ 0 & -28 & -8 & -20 \\ 0 & 28 & 8 & 20 \end{array}\right)$$

Paso 6. Sumar la fila segunda a la tercera

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -4 & -8 & -4 & -8 \\ 0 & -28 & -8 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

En este caso la última ecuación no dice nada:

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 0,$$

por lo que el sistema se reduce a dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} -4x - 8y - 4z &= -8 \\ -28y - 8z &= -20 \end{aligned}$$

De la segunda ecuación se deduce que

$$y = \frac{20 - 8z}{28} = \frac{5 - 2z}{7}$$

y sustituyendo este valor en la primera:

$$x = \frac{8 - 8y - 4z}{4} = 2 - 2y - z = 2 - 2 \cdot \frac{5 - 2z}{7} - z = \frac{4 - 3z}{7}$$

de manera que para cada valor de z, obtenemos una solución distinta, por lo que el sistema tiene infinitas soluciones.

Observación importante: Si la matriz formada por los coeficientes del sistema (lo que en los ejemplos anteriores estaba a la izquierda de la línea vertical) tiene determinante distinto de 0, entonces el sistema es **compatible determinado.** En efecto, si volvemos al sistema que estudiamos como ejemplo de sistema compatible determinado,

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ 3x - y + z &= 1 \\ x + 3y - z &= 1 \end{aligned}$$

y consideramos la matriz ampliada que usamos en el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

y nos quedamos con la parte que está a la izquierda de la línea vertical:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

entonces podemos comprobar que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \ldots = 16 \neq 0.$$

Esta observación jugará un papel fundamental en los apartados que veremos a continuación.