4.3. EXTREMOS RELATIVOS DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES

La definición de máximo y mínimo relativo para funciones $z = f(x,y)$ de dos variables es similar a la definición que se dio de estos conceptos para el caso de funciones de una variable. Para que $f(x,y)$ tenga un <u>máximo relativo</u> en (x_0, y_0) el valor $f(x_0, y_0)$ debe ser mayor o igual que los valores $f(x,y)$ para (x,y) cercano a (x_0, y_0). Para que haya un <u>mínimo relativo</u> ha de ser menor o igual. Los ejemplos a tener en mente para entender estos conceptos son "la copa" para un mínimo relativo y "el gorro" para un máximo relativo.

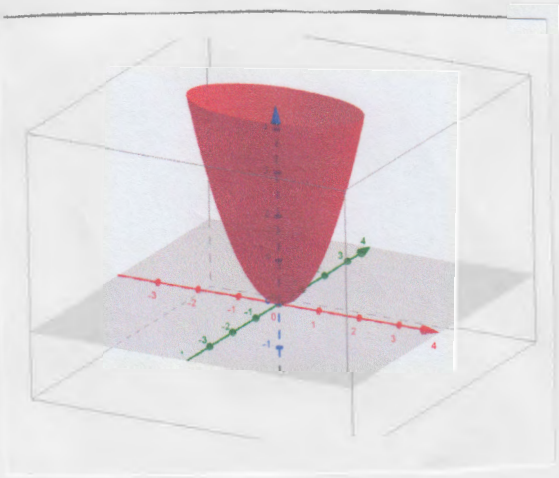


Fig 1. Mínimo relativo:
$f(x_0, y_0) \leq f(x,y)$
cerca de (x_0, y_0)

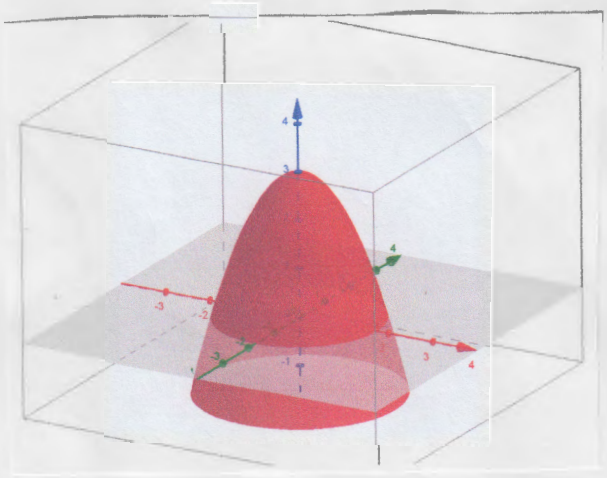
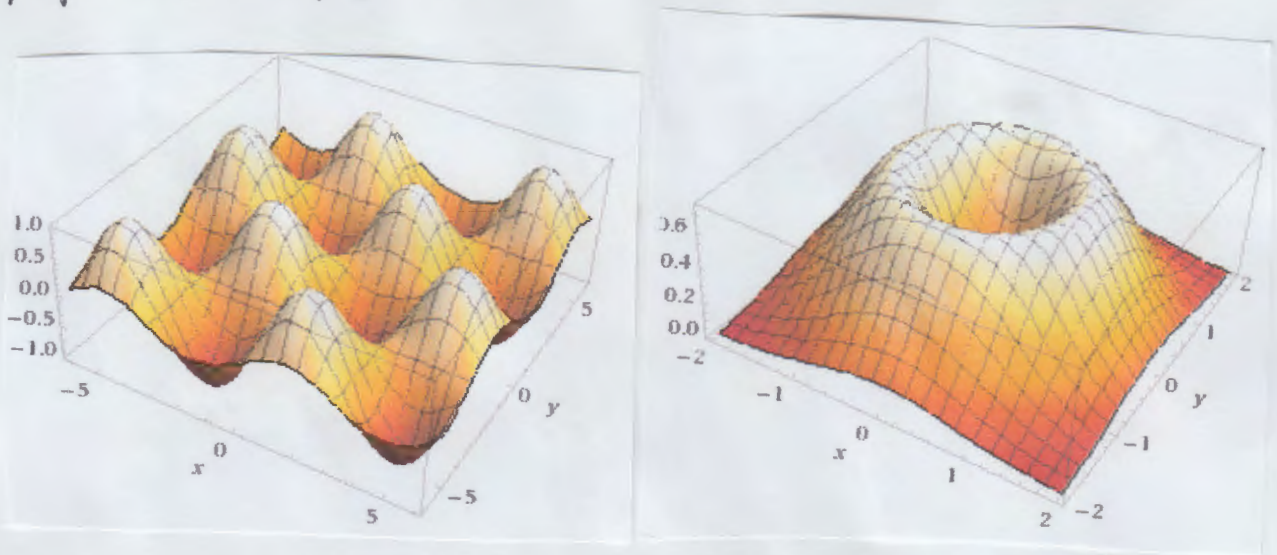


Fig 2. Máximo relativo
$f(x_0, y_0) \geq f(x,y)$
cerca de (x_0, y_0)

Una función de dos variables puede tener muchos máximos y/o mínimos relativos, como se puede ver en los

ejemplos de la figura 3:



$f(x,y) = (\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} y)$

$f(x,y) = 2(x^2+y^2)\, e^{-(x^2+y^2)}$
"El volcán"

Fig. 3.

Tanto en un máximo como en un mínimo relativo

Si la función $z=f(x,y)$ tiene un mínimo relativo en (x_0,y_0) las secciones por los planos $x=x_0$ e $y=y_0$ producen curvas con un mínimo. Por tanto, si f se puede derivar, se ha de tener inclinación cero, es decir

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0 .$$

Igual sucede para los **máximos** relativos.

<u>Definición (Puntos críticos)</u>

Supongamos que $z=f(x,y)$ se puede derivar cerca de (x_0,y_0). El punto (x_0,y_0) es un <u>punto crítico</u> de f si

$$\nabla f(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right) = (0,0)$$

Sabemos que los máximos y los mínimos relativos son puntos críticos. Hay otro tipo de punto crítico que ha aparecido en la sección 4.1: el punto de silla (Figura 4).

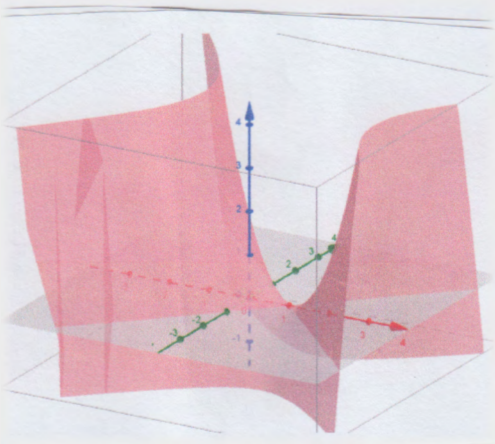


Fig 4. Punto de silla

<u>Ejemplo 1</u> Calcula los puntos críticos de la función

$$f(x,y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$$

S/ Los puntos críticos son las soluciones de

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = -3x^2 + 4y = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4x - 4y = 0 \end{array}\right\} \quad x = y \quad \Uparrow \quad -3y^2 + 4y = 0 \iff y(-3y+4) = 0$$

Tenemos $y = 0$ e $y = 4/3$. Como $x = y$, los puntos críticos de esta función son

$$A = (0,0), \quad B = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right).$$

En esta sección vamos a aprender dos criterios para decidir si un punto crítico es un máximo relativo, un mínimo relativo o un punto de silla.

Para ello necesitamos usar las derivadas parciales segundas de una función de dos variables:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \nearrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial x} \searrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \nearrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} \searrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Para funciones de dos variables hay cuatro derivadas parciales segundas o de orden 2. Afortunadamente, en todos los ejemplos de este curso las derivadas segundas cruzadas $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ serán iguales.

<u>Ejemplo 2</u> Calcula las derivadas parciales segundas de la función $f(x,y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$

S/ $\frac{\partial f}{\partial x} = -3x^2 + 4y$ $\nearrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6x$; $\searrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 4x - 4y$ $\nearrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4$ $\searrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4$

Con las cuatro derivadas segundas se puede formar una matriz (que será simétrica) y que se llama <u>matriz Hessiana de f</u>:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de la matriz Hessiana en un punto crítico determinarán qué tipo de punto crítico es. Recuerda que los autovalores de una matriz H son las soluciones de la matriz $\det(H-\lambda I)=0$. Estudiemos como son los autovalores en cada una de las situaciones típicas de punto crítico: "la copa", "el gorro" y "la silla de montar".

<u>La copa</u>: $f(x,y)=x^2+3y^2$ tiene un mínimo relativo en $A=(0,0)$. Como $\frac{\partial f}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial f}{\partial y}=6y$, su matriz Hessiana en el punto $A=(0,0)$ (y en cualquier otro punto) es

$$Hf(0,0)=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Los autovalores de esta matriz, 2 y 6, son ambos positivos.

<u>El gorro</u>: $g(x,y)=3-2x^2-y^2$ tiene un máximo relativo en $A=(0,0)$. Como $\frac{\partial f}{\partial x}=-4x$, $\frac{\partial f}{\partial y}=-2y$, su matriz Hessiana en el punto $A=(0,0)$ (y en cualquier otro punto) es

$$Hg(0,0)=\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Los autovalores de esta matriz, -4 y -2, son ambos negativos

<u>La silla de montar</u>: $h(x,y) = x^2 - y^2$ tiene un punto de silla en $A=(0,0)$. Como $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$, su matriz Hessiana en el punto $A=(0,0)$ (y en cualquier otro) es

$$Hh(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Los autovalores de esta matriz, 2 y -2, tienen distinto signo.

<u>CLASIFICACIÓN DE PUNTOS CRÍTICOS</u> (<u>Criterio 1</u>).

Sea $A=(x_0,y_0)$ un punto crítico de una función $z=f(x,y)$ que tiene derivadas parciales segundas continuas cerca de (x_0,y_0), e.d. $\nabla f(x_0,y_0)=(0,0)$.

1) Si los dos autovalores de $Hf(x_0,y_0)$ son <u>positivos</u>, entonces f tiene un <u>mínimo relativo</u> en $A=(x_0,y_0)$
2) Si los dos autovalores de $Hf(x_0,y_0)$ son <u>negativos</u>, entonces f tiene un <u>máximo relativo</u> en $A=(x_0,y_0)$
3) Si los dos autovalores de $Hf(x_0,y_0)$ tienen <u>distinto signo</u>, entonces f tiene un <u>punto de silla</u> en $A=(x_0,y_0)$

En todos los demás casos, el criterio no permite extraer conclusiones.

En los libros suele darse otro criterio, que es equivalente al anterior, pero no requiere calcular autovalores.

CLASIFICACIÓN DE PUNTOS CRÍTICOS (Criterio 2)

Sea $A=(x_0,y_0)$ un punto crítico de una función $z=f(x,y)$ que tiene derivadas parciales segundas continuas cerca de (x_0,y_0), e.d. $\nabla f(x_0,y_0)=(0,0)$. Sea

$$D = \det Hf(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\right)^2.$$

1. Si $D>0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)>0$, la función $z=f(x,y)$ tiene un <u>mínimo relativo</u> en $A=(x_0,y_0)$.
2. Si $D>0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)<0$, la función $z=f(x,y)$ tiene un <u>máximo relativo</u> en $A=(x_0,y_0)$.
3. Si $D<0$, la función $z=f(x,y)$ tiene un <u>punto de silla en $A=(x_0,y_0)$</u>.

En todos los demás casos el criterio no permite extraer conclusiones.

<u>Ejemplo 3</u>. Clasifica los puntos críticos de la función

$$z=f(x,y)=-x^3+4xy-2y^2+1$$

S/ En el Ejemplo 1 obtuvimos que $A=(0,0)$ y $B=(\frac{4}{3},\frac{4}{3})$ son los puntos críticos de f. En el ejemplo 2 hallamos la matriz Hessiana:

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix} -6x & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Para el punto $A=(0,0)$,

$$Hf(0,0)=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de esta matriz son

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 4 \\ 4 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 4\lambda + \lambda^2 - 16 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{16+64}}{2}$$

$$\lambda_1 \approx 2'47 \quad , \quad \lambda_2 = -6'47$$

Puesto que tienen distinto signo, por el criterio 1, $A=(0,0)$ es un punto de silla de $z=f(x,y)$. El mismo resultado se obtiene con el criterio 2 porque $D = 0-16 = -16 < 0$.

Para el punto $B = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$,

$$Hf\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de esta matriz son

$$\begin{vmatrix} -8-\lambda & 4 \\ 4 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (-8-\lambda)(-4-\lambda) - 16 = \lambda^2 + 12\lambda + 32 - 16 = 0$$

$$\lambda^2 + 12\lambda + 16 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-12 \pm \sqrt{144-64}}{2} = \frac{-12 \pm \sqrt{80}}{2}$$

$$\lambda_1 \approx -1'53 \quad , \quad \lambda_2 = -10'47$$

Puesto que ambos son negativos, por el criterio 1, $B = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ es un máximo relativo de $z=f(x,y)$. El mismo resultado se obtiene con el criterio 2 porque

$$D = 64 - 16 > 0$$

y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = -8 < 0$.

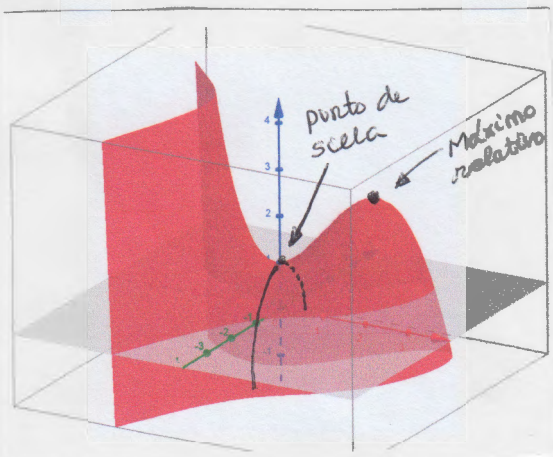
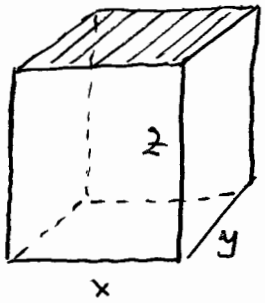


Fig 5. Superficie de ecuación $z=f(x,y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$

Ahora se puede practicar con los cuatro apartados del ejercicio 15 de la Hoja 7 y con el ejercicio 20 de la misma hoja. Además, los ejercicios 16, 17, 18 y 19 son también problemas de máximos y mínimos, pero antes de hallarlos hay que escribir la función que se desea optimizar.

Ejemplo 4. (Ejercicio 16, Hoja 7). Para guardar muestras necesitamos cajas de cartón, como las de zapatos, pero con la tapa de plástico. Cada cm^2 de cartón cuesta 1 céntimo de euro y cada cm^2 de plástico cuesta 3 céntimos. Las cajas deben tener un volumen de $2000\ cm^3$. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja más barata posible? ¿Cuánto cuesta esta caja?

S/



$$V = 2000 = xyz \Rightarrow z = \frac{2000}{xy}$$

$$C = 3xy + xy + 1xz + 1yz$$

$$C = 4xy + \frac{4000}{y} + \frac{4000}{x}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial x} &= 4y - \frac{4000}{x^2} = 0 \\ \frac{\partial C}{\partial y} &= 4x - \frac{4000}{y^2} = 0 \end{aligned}\right\} \quad y = \frac{1000}{x^2}$$

$$\Downarrow$$

$$4x - \frac{4000\, x^4}{(1000)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$4x\left(1 - \frac{x^3}{1000}\right) = 0 \ ; \ \boxed{x = 0} \ ; \ x^3 = 1000 \Rightarrow \boxed{x = 10}$$

Desartamos la solución $x=0$ que no produce una caja.

Si $x=10$, $y = \frac{1000}{(10)^2} \Rightarrow y=10$; ahora $z = \frac{2000}{(10)(10)} = 20$.

Para asegurarnos que es un mínimo calculamos la matriz hessiana:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{8000}{x^3}; \quad \frac{\partial^2 C}{\partial y \partial x} = 4 = \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} = \frac{8000}{y^3}.$$

Luego

$$HC(10,10) = \begin{pmatrix} \frac{8000}{10^3} & 4 \\ 4 & \frac{8000}{10^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Como $D = 64-16 = 48 > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 8 > 0$ se tiene un mínimo relativo.

El coste del material para fabricar esta caja es

$C(10,10) = 400 + 400 + 400 = 1200$ céntimos.

El coste del material es 12 euros. La caja tiene que ser el <u>doble de alto</u> que <u>de largo</u> y <u>de ancho</u>

———— x ————