4.2. DERIVADAS PARCIALES. GRADIENTE.

Para las funciones de varias variables podemos preguntarnos: ¿Cómo afecta a la función el cambio de una de sus variables independientes? Por ejemplo, ¿Cuál es el efecto de un catalizador en un experimento si mantenemos fijas otras variables, como presión y temperatura? La respuesta la dan las <u>derivadas parciales</u>.

<u>Definición</u> (Derivadas parciales)

Sea $z = f(x,y)$ una función de dos variables. La derivada parcial de f con respecto a x es

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x,y)}{h},$$

y la derivada parcial de f con respecto a y es

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x,y)}{h}.$$

NOTACIÓN: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = f_x$

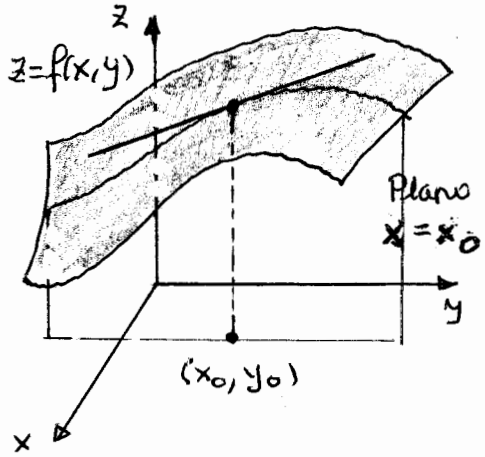
<u>CÁLCULO</u>:

Para calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$ se mantiene y constante y se deriva la función con respecto a x. Para calcular $\frac{\partial f}{\partial y}$ se mantiene x constante y se deriva la función con respecto a y.

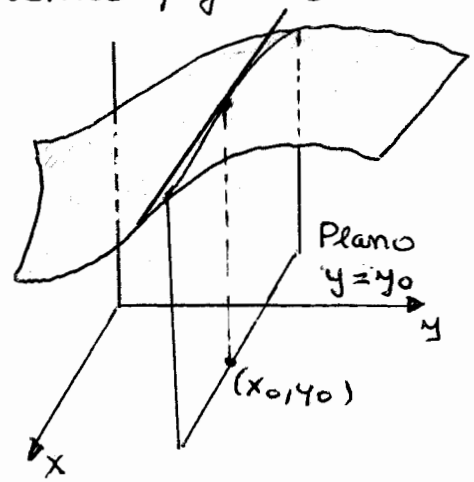
<u>Ejemplo 1</u>. Para la función $f(x,y) = x^2 y + y^3 e^{-x}$ sus derivadas parciales son:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - y^3 e^{-x} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2 e^{-x}$$

La interpretación geométrica de las derivadas parciales definidas se describe en las siguientes figuras:



$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ es la pendiente de la tangente a la sección de $z=f(x,y)$ con el plano $x = x_0$



$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ es la pendiente de la tangente a la sección de $z=f(x,y)$ con el plano $y = y_0$.

El significado de las derivadas parciales es similar al de las derivadas de funciones de una variable. Por ejemplo, $\frac{\partial f}{\partial x}$ representa la velocidad de variación de la variable $z=f(x,y)$ con respecto a x (manteniendo fija la variable y). En particular, cuando $\frac{\partial f}{\partial x}$ es positiva, significa que z aumenta al aumentar x (con y fija); cuando $\frac{\partial f}{\partial x}$ es negativa, significa que z disminuye al aumentar x (con y fija). Consideraciones similares pueden hacerse con $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Ejemplo 2. (C. Neuhauser, Matemáticas para Ciencias, 2ª edición, Pearson / Prentice Hall, 2004; sección 10.3)

Holling (1959) obtuvo una expresión del número de presas P devoradas por un depredador (durante un intervalo fijo de tiempo T_0) en función de la densidad de presas disponibles N y el tiempo de caza, C, dedicado a cada presa:

$$P = f(N, C) = \frac{aNT_0}{1 + aCN}.$$

El número a es una constante positiva, que se interpreta como la tasa de ataque del depredador.

a) ¿Cómo afecta el número de presas devoradas un aumento del tiempo de caza dedicado a cada presa?

b) ¿Cómo afecta al número de presas devoradas un incremento de la densidad de presas?

S/ a) Queremos saber si P aumenta o disminuye al aumentar C, manteniendo N constante. Es decir, calcular $\frac{\partial P}{\partial C}$:

$$\frac{\partial P}{\partial C} = -\frac{a^2N^2T_0}{(1+aCN)^2} < 0.$$

Como esta derivada es negativa, el número de presas devoradas disminuye al aumentar el tiempo de caza dedicado a cada presa (lo que parece razonable).

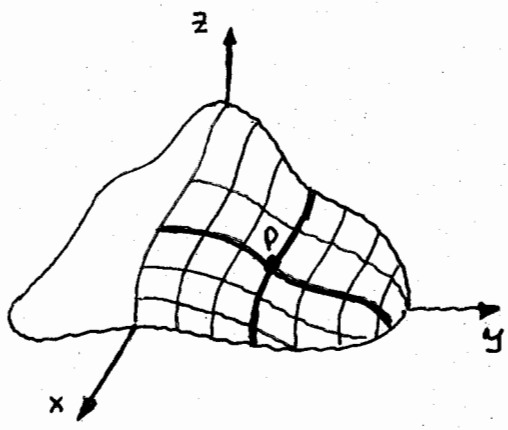
b) Ahora queremos saber si P aumenta o disminuye

al aumentar N, manteniendo C constante. Es decir, calcular $\frac{\partial P}{\partial N}$:

$$\frac{\partial P}{\partial N} = \frac{aT_0(1+aCN) - aNT_0(aC)}{(1+aCN)^2} = \frac{aT_0}{(1+aCN)^2} > 0.$$

Como esta derivada parcial es positiva el número de presas devoradas aumenta al aumentar la densidad de presas (que es también razonable).

DERIVADAS DIRECCIONALES



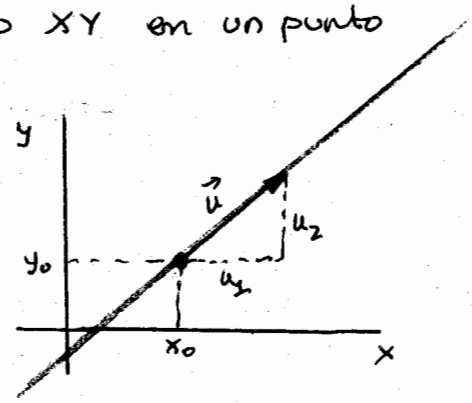
Nos situamos en la ladera de una colina cuya altura se modela con la ecuación

$$z = f(x, y).$$

Queremos averiguar su inclinación en cualquier dirección a partir del punto P en el que nos encontramos. Si queremos ir en la dirección del eje OX su inclinación la da $\frac{\partial f}{\partial x}(P)$. Si queremos ir en la dirección del eje OY su inclinación la da $\frac{\partial f}{\partial y}(P)$.

Cualquier otra dirección del plano XY en un punto queda determinada por un vector <u>unitario</u> de dos componentes:

$$\vec{u} = (u_1, u_2), \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 1$$



La recta que pasa por el punto (x_0, y_0) en la dirección de $\vec{u}$ tiene por ecuaciones

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + t\vec{u}_1 \\ y = y_0 + t\vec{u}_2 \end{array} \right\}$$

Sustituimos estos valores de x e y en la función $z = f(x,y)$ para obtener

$$z = f(x,y) = f(x_0 + t\vec{u}_1,\ y_0 + t\vec{u}_2)$$

que es una función de la variable t. La derivada $\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0}$ se llama <u>derivada direccional de</u> f en el punto (x_0, y_0) en la dirección del vector (unitario) $\vec{u}$ y se escribe $D_{\vec{u}} f(x_0, y_0)$.

Para calcular la derivada direccional usaremos el siguiente resultado:

<u>TEOREMA 1.</u>

Sea $z = f(x,y)$ una función que se puede derivar. La <u>derivada direccional</u> de f en un punto (x,y) en la dirección del vector <u>unitario</u> $\vec{u} = (u_1, u_2)$ es

$$D_{\vec{u}} f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x} u_1 + \frac{\partial f}{\partial y} u_2$$

<u>Dem.</u> Por definición $D_{\vec{u}} f(x,y) = \left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0}$ cuando $z = f(x,y) = f(x + t\vec{u}_1,\ y + t\vec{u}_2)$. Entonces,

$$D_{\vec{u}} f(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + hu_1,\ y + hu_2) - f(x,y)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x + hu_1, y + hu_2) - f(x, y + hu_2)}{hu_1} u_1 + \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + hu_2) - f(x,y)}{hu_2} u_2$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot u_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot u_2 .$$

∎

<u>Definición (Gradiente)</u>. Sea $z = f(x,y)$ una función con derivadas parciales. Se llama <u>gradiente</u> de f en el punto (x,y) al vector fila

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

<u>Ejemplo 3</u>. Calcula la derivada direccional de la función $f(x,y) = 4 - x^2 - \frac{1}{4}y^2$ en el punto $(1,2) = P$ en la dirección del vector $\vec{v} = (1, \sqrt{3})$.

S/ Como $\|\vec{v}\| = \sqrt{1+3} = 2$, el vector unitario en la dirección de $\vec{v}$ es $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Como

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = -2 \text{ y } \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -1,$$

se tiene

$$D_{\vec{v}} f(1,2) = D_{\vec{u}} f(1,2) = (-2,-1)\begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \approx -1'866.$$

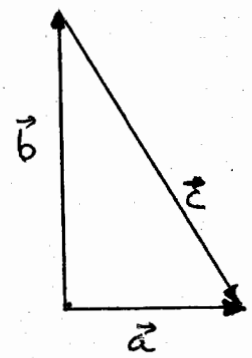
<u>VECTORES EN EL PLANO</u>

Dados dos vectores $\vec{a} = (a_1, a_2)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2)$ en el plano, se llama <u>producto escalar</u> de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ al número

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1, a_2)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Cuando $\vec{a} = \vec{b}$ se tiene $\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 = \|\vec{a}\|^2$ es el cuadrado de la longitud del vector $\vec{a}$.

Cuando $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares, el vector $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$ satisface el teorema de Pitágoras



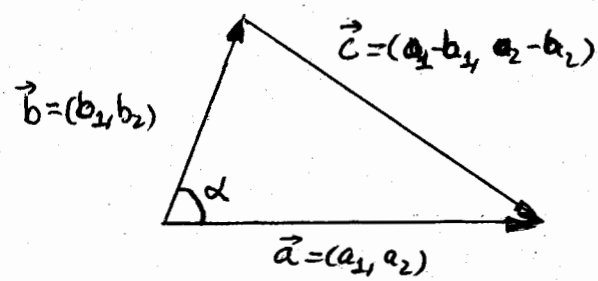
$$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 = (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2)$$

Simplificando esta expresión se obtiene

$$-2a_1b_1 - 2a_2b_2 = 0 \iff a_1b_1 + a_2b_2 = 0$$

Por tanto, dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares cuando su producto escalar es 0.

¿Que sucede si no son perpendiculares? En lugar del teorema de Pitágoras hay que usar la fórmula del coseno para resolver un triángulo:



$$\|\vec{c}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \cos\alpha.$$

Por tanto,

$$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 = (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \cos\alpha$$

Simplificando esta expresión se obtiene

$$-2a_1b_1 - 2a_2b_2 = -2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \cos\alpha.$$

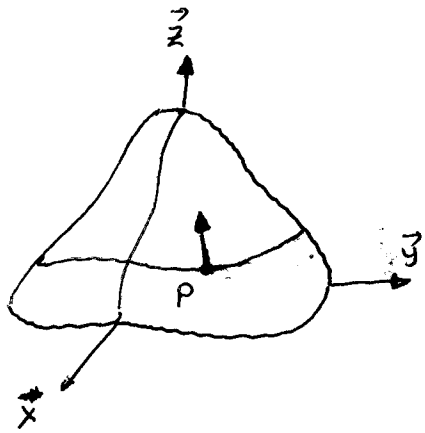
Por tanto

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}}$$

Esta fórmula permite calcular el ángulo que forman dos vectores.

Si el ángulo es cero (e.d. $\cos\alpha = 1$), los vectores son paralelos.

Si el ángulo es $\alpha = \pi/2$ (e.d. $\cos\alpha = 0$), los vectores son perpendiculares.



Nos situamos de nuevo en la ladera de una colina de ecuación $z = f(x,y)$. Ahora sabemos calcular la variación o inclinación en cualquier punto en una dirección $\vec{u} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ dada: es $D_{\vec{u}} f(x,y)$, con $\vec{u}$ unitario.

¿Cuál será la variación máxima?

Como $\vec{u}$ es un vector unitario

$$D_{\vec{u}} f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \vec{u} = \| \nabla f(x,y) \| \, \| \vec{u} \| \cos \alpha$$
$$= \| \nabla f(x,y) \| \cos \alpha$$

Mirando a esta expresión se observa que el valor máximo se alcanzará cuando $\cos \alpha = 1$, e.d. $\nabla f(x,y)$ y $\vec{u}$ tienen la misma dirección y sentido. El valor mínimo se alcanzará cuando $\cos \alpha = -1$, e.d. $\nabla f(x,y)$ y $\vec{u}$ tienen la misma dirección, pero distinto sentido.

TEOREMA 2

Sea $z = f(x,y)$ una función que se puede derivar en un punto (x,y).

1) La dirección de <u>máximo</u> <u>crecimiento</u> de f en el punto (x,y) viene dada por el gradiente $\nabla f(x,y)$. Este valor máximo es

$$\| \nabla f(x,y) \| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

2) La dirección de <u>mínimo</u> <u>crecimiento</u> de f en el punto (x,y) viene dada por $-\nabla f(x,y)$. Este valor mínimo es

$$-\|\nabla f(x,y)\| = -\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

<u>Ejemplo 4</u>. La temperatura T en ºC en la superficie de una placa metálica es $T(x,y) = 30-4x^2-y^2$, donde x e y se miden en cm.

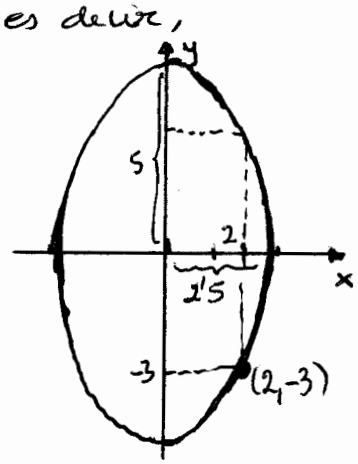
a) Dibuja la curva de nivel de $T(x,y)$ que pasa por el punto $P=(2,-3)$

b) ¿En que dirección, a partir del punto $P=(2,-3)$, crece más rápidamente la temperatura? ¿Cuál es ese ritmo de crecimiento?

S/a) Como $T(2,3) = 20-4(2^2)-(-3)^2 = 30-16-9 = 5$, se pide la curva de nivel de altura 5, es decir,

$30-4x^2-y^2=5 \iff 4x^2+y^2=25$

$\iff \dfrac{x^2}{(5/2)^2}+\dfrac{y^2}{5^2}=1$. Esta curva es una elipse de centro $(0,0)$ y semiejes $a=5/2$, $b=5$



b) La dirección de máximo crecimiento la da $\nabla T(2,-3)$:

$\dfrac{\partial T}{\partial x} = -8x \Rightarrow \dfrac{\partial T}{\partial x}(2,-3) = -16$

$\dfrac{\partial T}{\partial y} = -2y \Rightarrow \dfrac{\partial T}{\partial y}(2,-3) = 6.$

Por tanto, la dirección de máximo crecimiento es $\nabla T(2,-3)=(-16,6)$ y el ritmo de crecimiento más rápido es

$$\|\nabla T(2,-3)\| = \sqrt{(-16)^2+(6)^2} = \sqrt{256+36} = \sqrt{292} \simeq 17'09^{\circ}C$$

por cada cm recorrido.

<u>OBSERVACIÓN:</u> De la fórmula $D_{\vec{u}} f(x,y) = \|\nabla f(x,y)\| \cos\alpha$ también se deduce que $D_{\vec{u}} f(x,y) = 0$ cuando $\cos\alpha = 0$; es decir, $\alpha = \pi/2$. Por tanto, esta situación se da cuando $\nabla f(x,y)$ y $\vec{u}$ son perpendiculares. Por otro lado, es claro que el crecimiento cero debe ocurrir en la dirección de las curvas de nivel. Este hecho, que el <u>gradiente es perpendicular a las curvas de nivel</u>, puede demostrarse rigurosamente a partir de la regla de la cadena para funciones de dos variables. No se verá en este curso.
