(VARIAS)

4. FUNCIONES DE DOS VARIABLES

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Julián de la Horra
Departamento de Matemáticas U.A.M.

Introducción

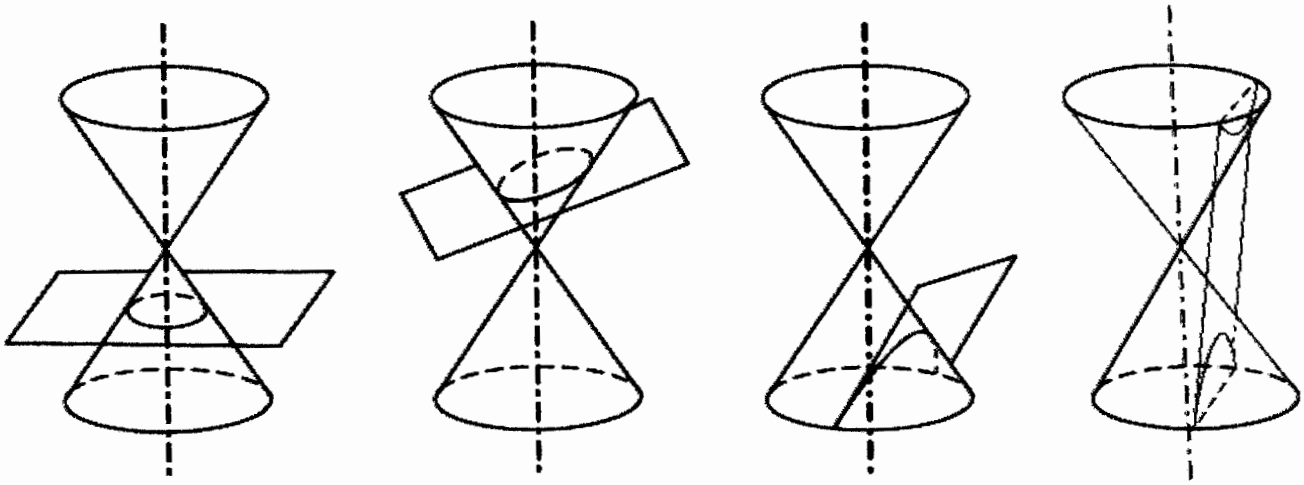
En las Ciencias Experimentales es muy frecuente que tengamos interés en poder expresar una variable (variable respuesta o variable dependiente) en función de dos o más variables (variables explicativas o variables independientes). Por ejemplo, podemos estar interesados en expresar:

- El peso de una persona en función de su estatura y del número medio de calorías diarias ingeridas.
- El peso de las aves en función de su envergadura y de su longitud.
- El nivel medio de contaminación en una región en función de las precipitaciones medias anuales y de su índice de industrialización.
- La presión atmosférica en un determinado lugar en función de su longitud y de su latitud.
- El número de presas devoradas por un depredador (en un tiempo fijado) en función de la densidad de presas y del tiempo necesario para cazar cada una de ellas.

El modelo matemático adecuado para expresar una variable en función de otras variables es la **función de varias variables**. Igual que ocurría con las funciones de una variable, algunas de las herramientas asociadas a este modelo nos permiten abordar y expresar muchos aspectos interesantes de la relación existente. Nos centraremos en las herramientas más sencillas: curvas de nivel y derivadas parciales.

4.0. ECUACIONES DE LAS CÓNICAS

Antes de estudiar la representación gráfica de las funciones de dos variables, vamos a familiarizarnos con las ecuaciones de las cónicas. Se llaman cónicas a las curvas que se obtienen como secciones de un cono por planos de distinta inclinación. Estas son:



*a*1) Circunferencia *a*2) Elipse *b*) Parábola *c*) Hipérbola

FIGURA 1

Circunferencia, elipse, parábola e hipérbola.

La ecuación de una circunferencia de centro (α,β) y radio r es

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

Si su centro es $(\alpha,\beta)=(0,0)$, la ecuación queda $x^2+y^2=r^2$.

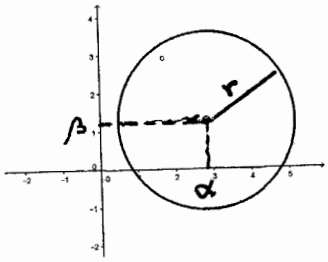


Fig2. Circunferencia

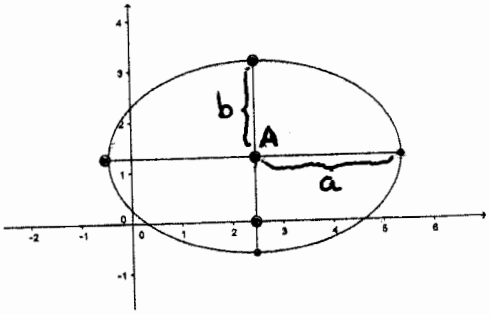


Fig3. Elipse

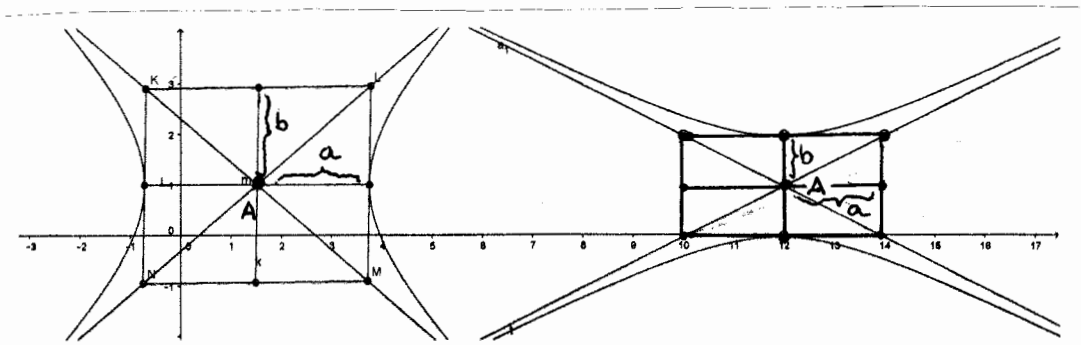
Una elipse es como una circunferencia, con longitud y anchura diferentes. Si su centro es $A=(\alpha,\beta)$ y los semiejes son a y b, su ecuación es

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$$

Una elipse con centro en $(0,0)$ y longitud a, y anchura b tiene como ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

La ecuación de una hipérbola de centro $A=(\alpha,\beta)$ y

y semiejes a y b es como la de la elipse, pero con un signo negativo delante de una de las variables al cuadrado, como se muestra en la figura 3:



$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1 \qquad -\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

Figura 3: Hipérbolas

Si su centro está en (0,0) sus ecuaciones son $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ó $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Una hipérbola especial, muy usada en las Ciencias Experimentales es la que tiene por ecuación $xy = c$ ($\Leftrightarrow y = c/x$) cuyas asíntotas son los ejes coordenados.

La ecuación

$$y - \beta = \frac{c}{x-\alpha}$$

determina una hipérbola cuyo centro se ha desplazado al punto $(\alpha, \beta) = A$ y cuyas asíntotas son paralelas a los ejes coordenados.

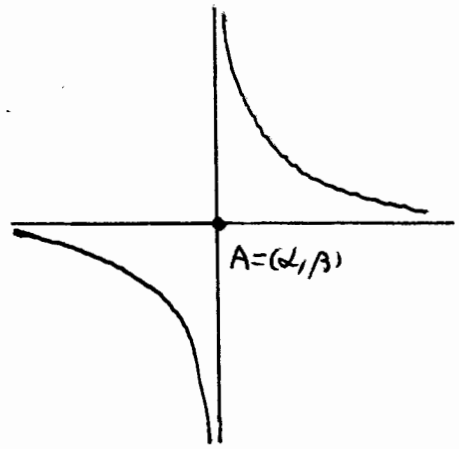
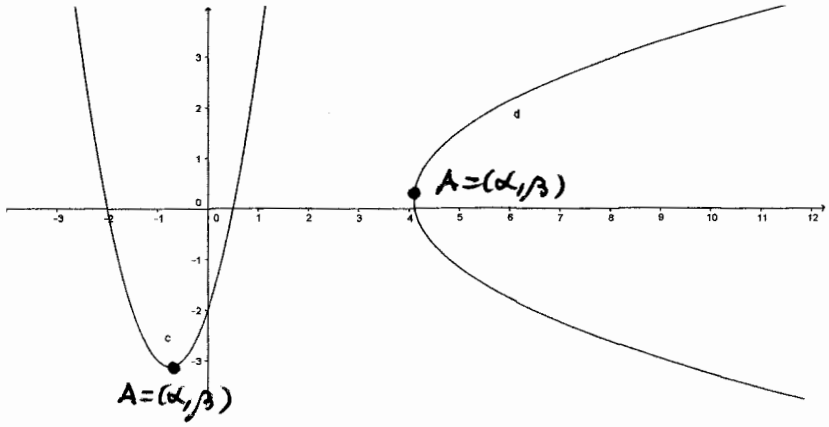


Fig 4: Hipérbola

La ecuación de una parábola con vértice en (0,0) es $y = px^2$, con p positivo (parábola hacia arriba) o con p negativo (parábola hacia abajo), o bien $x = py^2$, con p positivo (parábola hacia la derecha) o con p negativo (parábola hacia la izquierda).



$y - \beta = p(x-\alpha)^2$ $\qquad$ $x - \alpha = p(y-\beta)^2$

Figura 5: Parábolas

Si el vértice de la parábola se desplaza hasta el punto $A = (\alpha, \beta)$ las ecuaciones son las que se indican en la Figura 5.

Las ecuaciones de las cónicas son polinomios de grado 2 en las variables x e y. Para identificarlas hay que reducirlas a una de las ecuaciones anteriormente descritas, completando cuadrados. Tu trabajo lo puedes comprobar poniendo en la línea de comandos de Geogebra (c) o Walfram Alpha (c) la ecuación dada igualada a 0.

4.1. DEFINICIONES Y REPRESENTACIÓN GRÁFICA.

Definición 1. Una función de dos variables es una función definida en un subconjunto D de $\mathbb{R}^2$ que toma valores en $\mathbb{R}$. Escribimos $z = f(x,y)$ con $f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y D se llama dominio de f.

La gráfica de una función de dos variables $f(x,y)$ es el conjunto de puntos (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tales que $z = f(x,y)$. La gráfica de f es, por tanto, una superficie en $\mathbb{R}^3$.

Es difícil dibujar la gráfica de una función de dos variables. En los casos sencillos una estrategia posible es hallar las intersecciones de la superficie con planos paralelos a los ejes coordenados y dibujar estas secciones sobre el plano considerado. En los libros suele llamarse método de las secciones.

Hay algunas gráficas que serán relevantes en este curso.

Una de ellas tiene como modelo la ecuación $z = x^2 + y^2$ y su gráfica es una "copa". (Véase la figura 6). Su nombre técnico es "paraboloide circular". Sus secciones con planos paralelos al plano XY de altura positiva son circunferencias, mientras que su sección con el plano

$y=0$ es la parábola $z=x^2$ y su sección con el plano $x=0$ es la parábola $z=y^2$. En el punto $(0,0)$ está función tiene un <u>mínimo</u>.

La "copa invertida" o "gorro" tiene por ecuación modelo $z=-x^2-y^2$. Sus secciones con planos $z=-c$ $(c>0)$ son circunferencias $x^2+y^2=c$. Sus secciones con el plano $x=0$ es la parábola $z=-y^2$ dirigida hacia abajo. Su sección con el plano $y=0$ es la parábola $z=-x^2$, también dirigida hacia abajo. En el punto $(0,0)$ esta función tiene un <u>máximo</u>. (Véase la figura 7).

La figura 8 muesta un cono, como gráfica de la función $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$. Sus secciones con planos $z=c$ $(c>0)$ son circunferencias $x^2+y^2=c^2$. Con el plano $y=0$ su sección es $z=x$; con el plano $x=0$ su sección es $z=y$. En el punto $(0,0)$ esta función tiene un <u>mínimo</u>.

Otra función relevante es $z=f(x,y)=x^2-y^2$ (figura 9). Se parece a una "silla de montar a caballo" y también a un "puerto de montaña"; su nombre técnico es <u>paraboloide hiperbólico</u>.

La sección con el plano $x=0$ es la parábola hacia abajo $z=-y^2$. La sección con el plano $y=0$ es la parábola hacia arriba $z=x^2$. Con el plano $z=0$ se tiene $x^2-y^2=0 \Leftrightarrow (x+y)(x-y)=0$, lo que

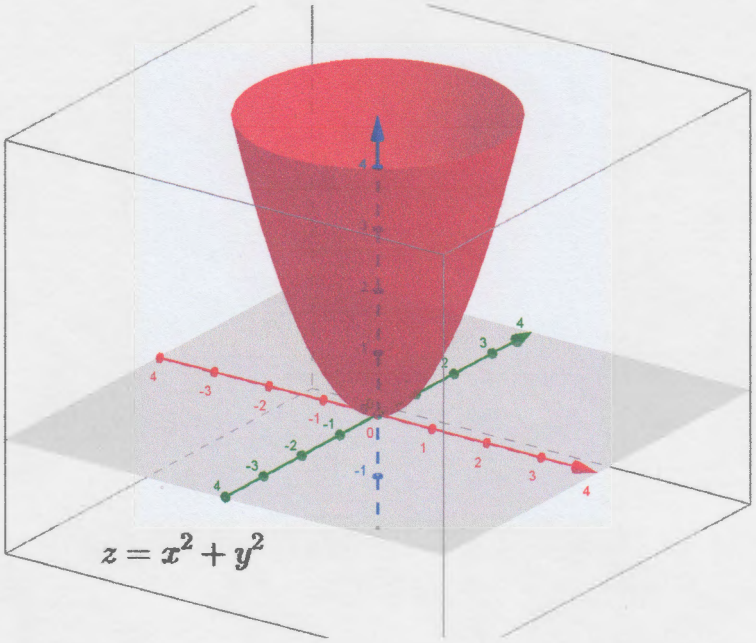


Figura 6 : Una copa - Paraboloide circular

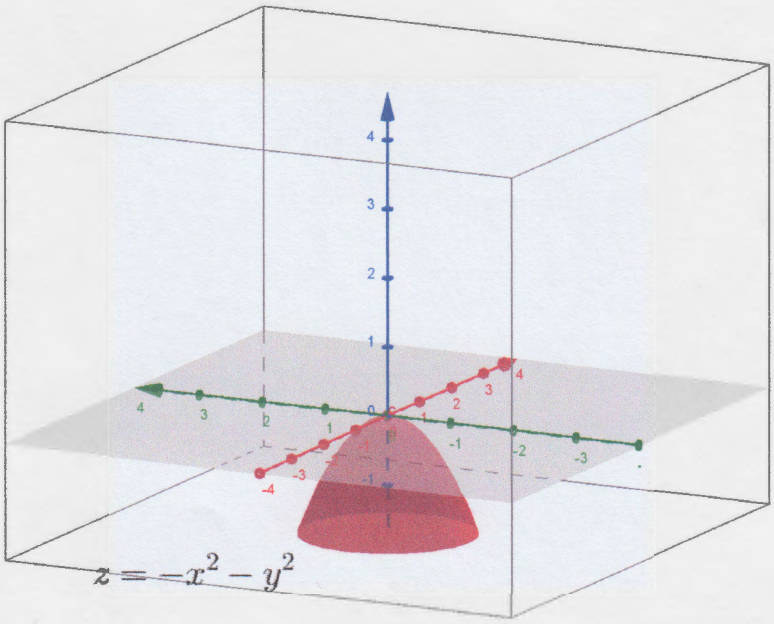


Figura 7 : Un gorro - Paraboloide circular

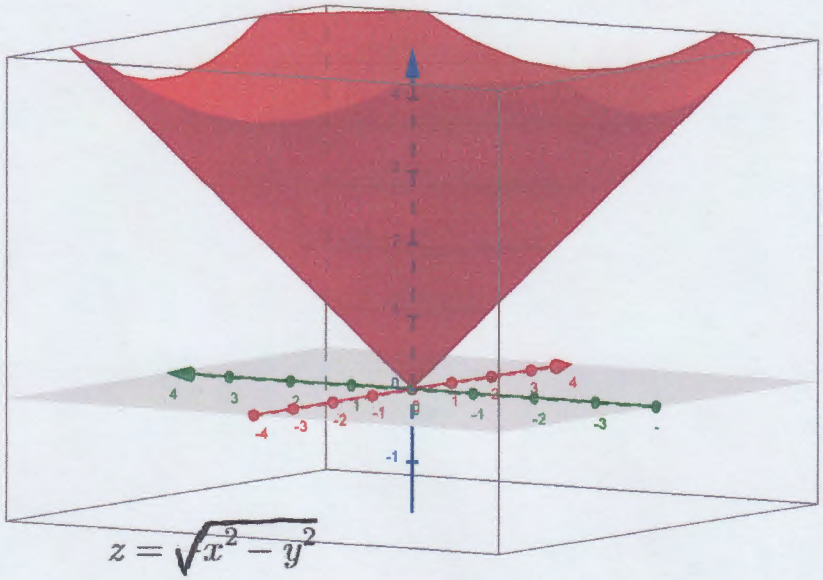
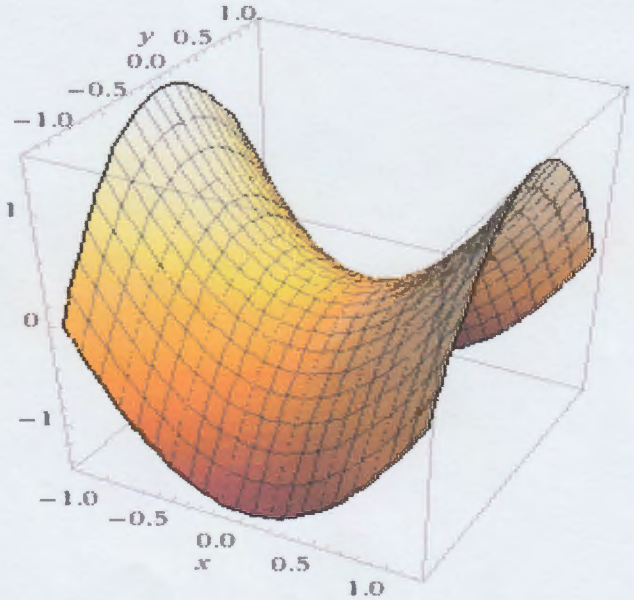


Figura 8 : Un cono



$z = x^2 - y^2$

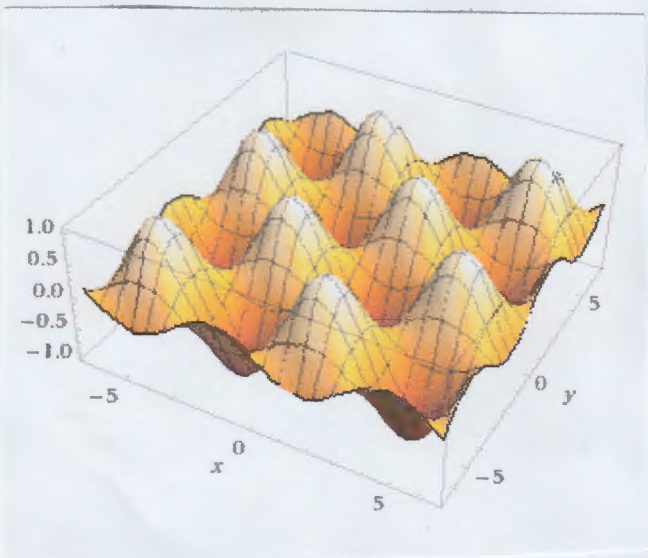
Figura 9 : Una silla de montar
Paraboloide hiperbólico

produce dos rectas $x=y$, $x=-y$. Con $z=c$ $(c\neq 0)$ se tiene $c=x^2-y^2$, que son hipérbolas.

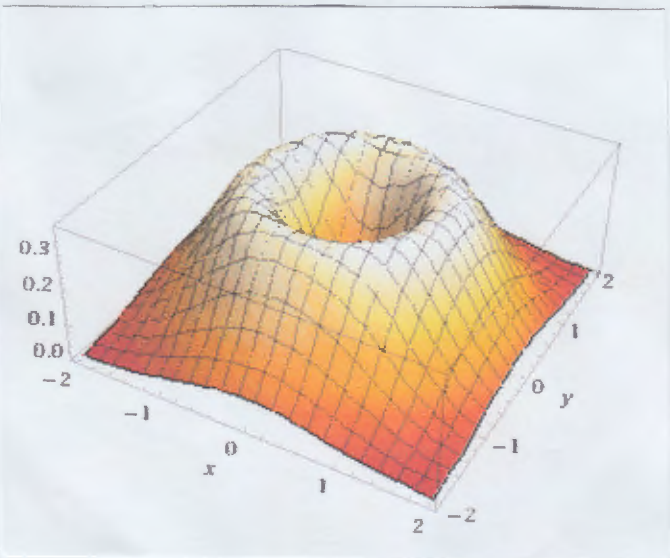
El punto $(0,0)$ de esta función se dice que es un <u>punto de silla</u>: tiene un <u>mínimo</u> si nos movemos por la superficie de su gráfica en la dirección del eje Y y un <u>máximo</u> si nos movemos en la dirección del eje X.

Funciones similares a estas son las que se piden representar en los ejercicios. Para funciones más complicadas se recurre a programas de ordenador. Al final de esta sección tienes información para hacerlo con Geogebra (c), Wolfram Alpha (c) y un programa que se llama Graphing Calculator 3D.

Aquí tienes dos gráficos hechos con Wolfram Alpha (c):



$f(x,y)=(\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} y)$



$f(x,y)=2(x^2+y^2)\,e^{-(x^2+y^2)}$

"El volcán"

Figura 10

CURVAS DE NIVEL. Otra forma de representar la información que contiene una función es la que se utiliza en los mapas topográficos (los que representan sobre un plano la altura de la superficie terrestre) o en los mapas de isobaras (los que aparecen en las informaciones meteorológicas) que representan curvas en las que la presión atmosférica es constante.

Figura 11. Mapa topográfico de un trozo de la Sierra de Guadarrama

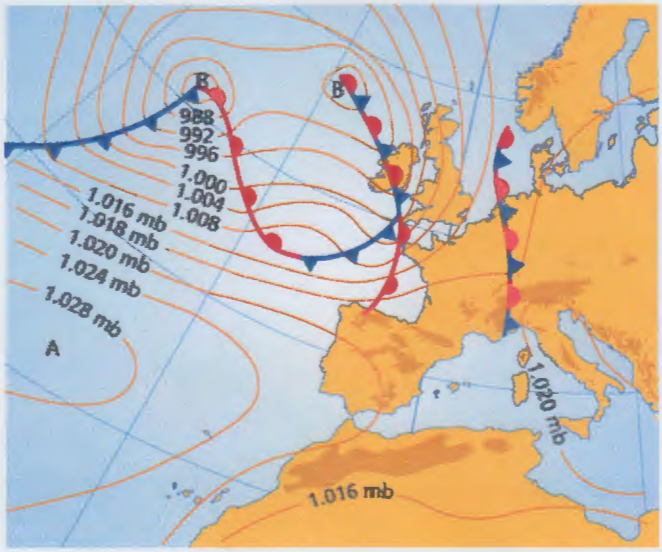


Figura 12. Mapa de isobaras

Definición 2 Las <u>curvas de nivel</u> de una función de dos variables $z = f(x,y)$ son las curvas planas $f(x,y) = c$ para distintos valores de $c \in \mathbb{R}$

Para que las curvas de nivel puedan dar información sobre una función es necesario presentar varias de ellas sobre el mismo plano para valores <u>equidistantes</u> de c. Por ejemplo $c = 0, 1, 2, 3, 4$, ó $c = -1, -0'5, 0, 0'5, 1$, dependiendo de la función que se estudie. La mayor o menor proximidad de las curvas de nivel nos indica la mayor o menor pendiente de la función.

Vamos a familiarizarnos con las curvas de nivel cerca de un <u>máximo local</u>, de un <u>mínimo local</u> y de un <u>punto de silla</u>

<u>Ejemplo 1</u>. Curvas de nivel de $z = f(x,y) = x^2 + 4y^2$ para $c = 0, 1, 2$.

S/ No hay curvas de nivel si $c < 0$. Si $c = 0$, $x^2 + 4y^2 = 0$ solo da el punto $(x,y) = (0,0)$. Si $c = 1$, $x^2 + 4y^2 = 1 \iff x^2 + \frac{y^2}{(1/2)^2} = 1$, es una elipse de centro $(0,0)$ y semiejes $a = 1$ y $b = 1/2$. Si $c = 2$, $x^2 + 4y^2 = 2 \iff \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1/2} = 1$, es una elipse de semiejes $a = \sqrt{2}$ y $b = 1/\sqrt{2}$.

(Ver las ~~figuras 13 y 16~~)

CURVAS DE NIVEL CON WOLFRAM ALPHA ©

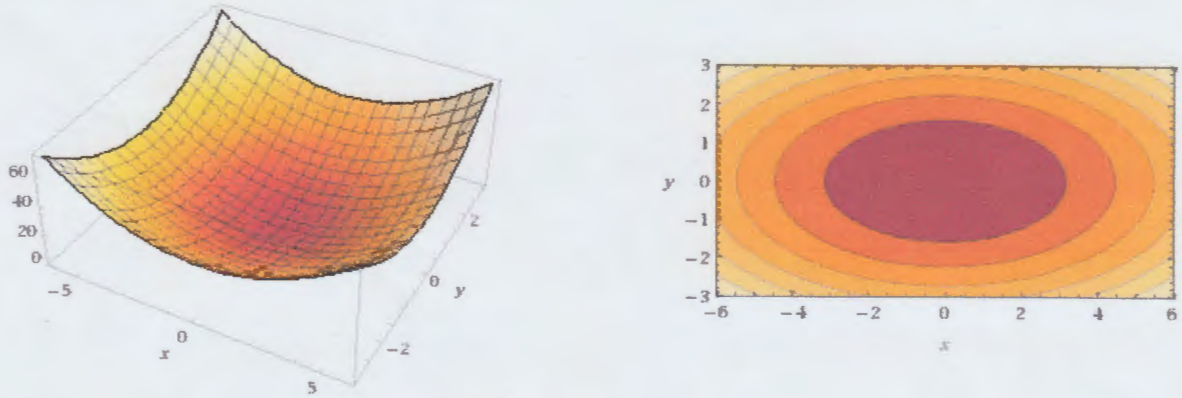


Figura 13. Superficie $z=x^2+4y^2$ y curvas de nivel.

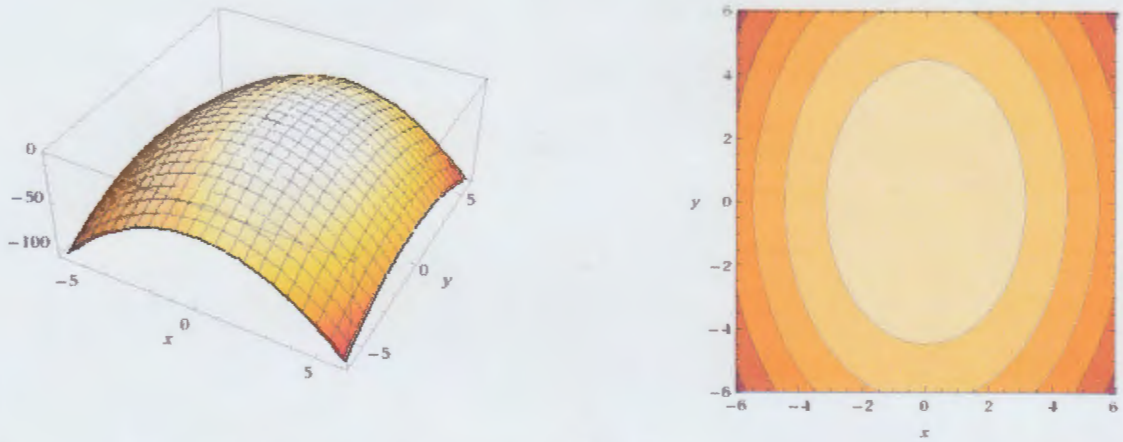


Figura 14. Superficie $z=-2x^2-y^2$ y curvas de nivel.

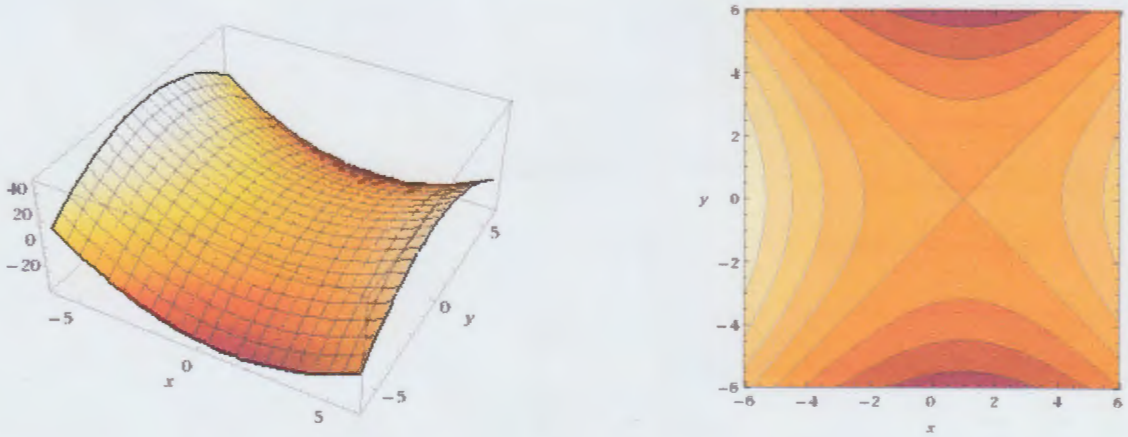


Figura 15. Superficie $z=(x-1)^2-y^2$ y curvas de nivel.

NOTA: En Walfram Alpha los colores oscuros indican curvas de nivel de menor altura que los colores claros.

Ejemplo 2. Curvas de nivel de $z=-2x^2-y^2$ para $c=0$, $c=-1$ y $c=-2$.

S/ No hay curvas de nivel si $c>0$. Si $c=0$, $-2x^2-y^2=0$ solo da el punto $(x,y)=(0,0)$. Si $c=-1$, $-2x^2-y^2=-1$ $\Leftrightarrow$ $2x^2+y^2=1$ $\Leftrightarrow$ $\frac{x^2}{1/2}+y^2=1$, es una elipse de centro $(0,0)$ y semiejes $a=1/\sqrt{2}$, $b=1$. Si $c=-2$, $-2x^2-y^2=-2$ $\Leftrightarrow$ $x^2-\frac{y^2}{2}=1$, es una elipse de centro $(0,0)$ y semiejes $a=1$, $b=\sqrt{2}$.

(Ver las figuras 14 y 17)

Ejemplo 3. Curvas de nivel de $z=(x-1)^2-y^2$ para $c=-1, 0, 1$.

S/ Para $c=-1$, $(x-1)^2-y^2=-1$ $\Leftrightarrow$ $-(x-1)^2+y^2=1$, es una hipérbola de centro $(1,0)$ y semiejes $a=1$, $b=1$, y sus ramas hacia arriba y hacia abajo.

Para $c=0$, $(x-1)^2-y^2=0$ $\Leftrightarrow$ $(x-1-y)(x-1+y)=0$, son dos rectas $x-y=1$, $x+y=1$ que se cortan en el punto $(1,0)$.

Para $c=1$, $(x-1)^2-y^2=1$ es una hipérbola de centro $(1,0)$, semiejes $a=1$, $b=1$ y sus ramas hacia la derecha y hacia la izquierda.

(Ver figuras 15 y 18)

CURVAS DE NIVEL CON GEOGEBRA ©

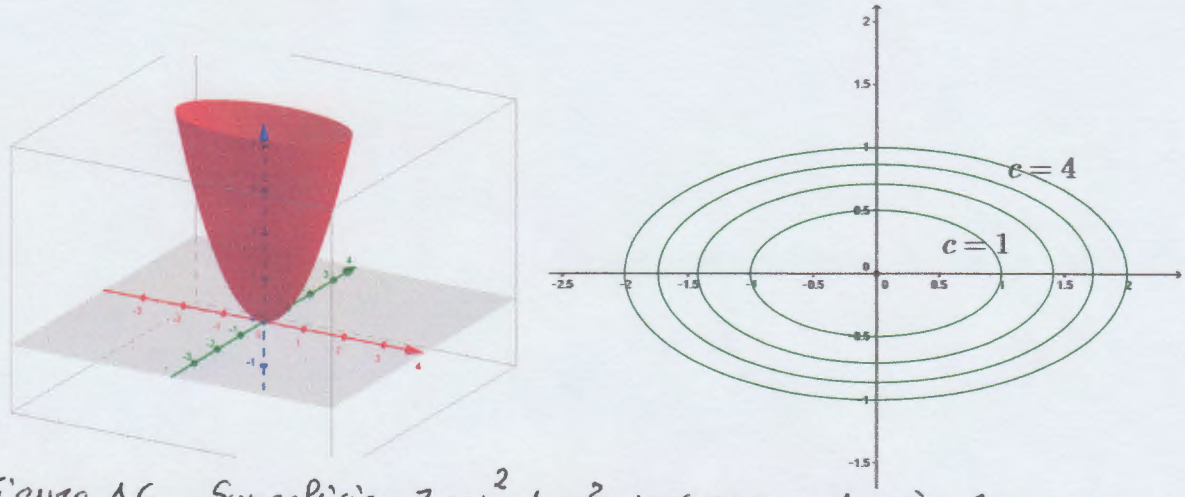


Figura 16. Superficie $z = x^2 + 4y^2$ y curvas de nivel para $c = 1, 2, 3, 4$

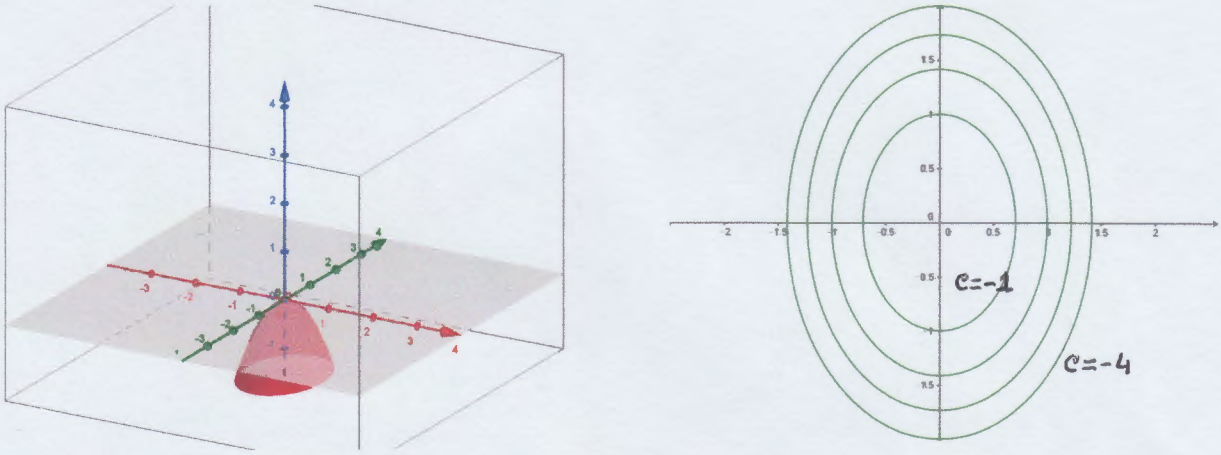


Figura 17. Superficie $z = -2x^2 - y^2$ y curvas de nivel para $c = -4, -3, -2, -1$

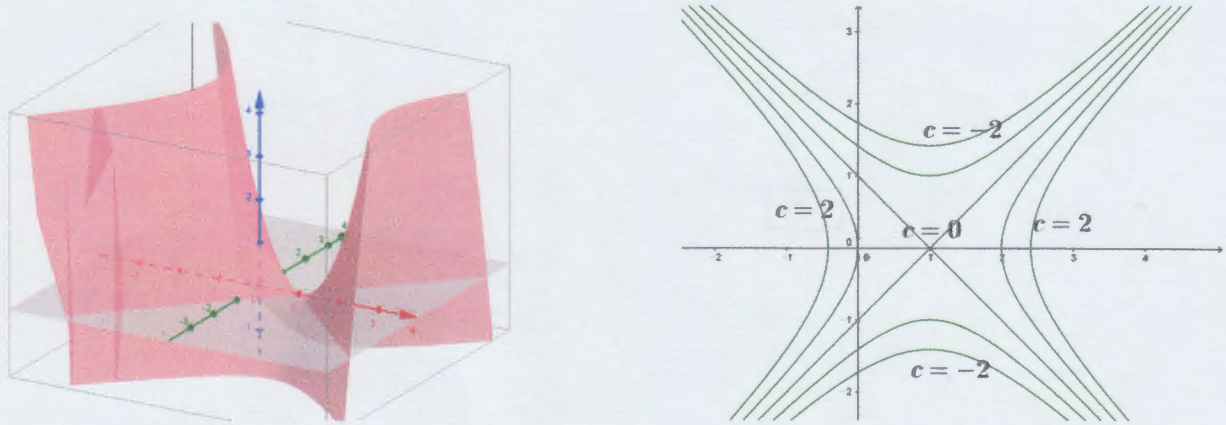


Figura 18. Superficie $z = (x-1)^2 - y^2$ y curvas de nivel para $c = -2, -1, 0, 1, 2$.

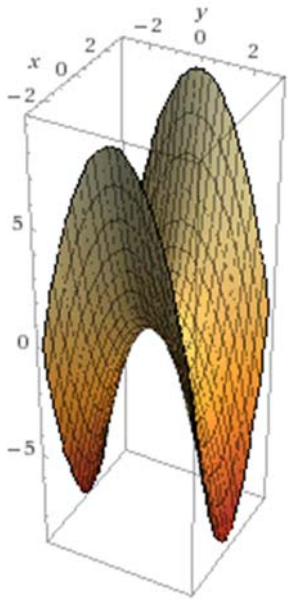
PROGRAMAS PARA REPRESENTAR SUPERFICIES Y CURVAS DE NIVEL

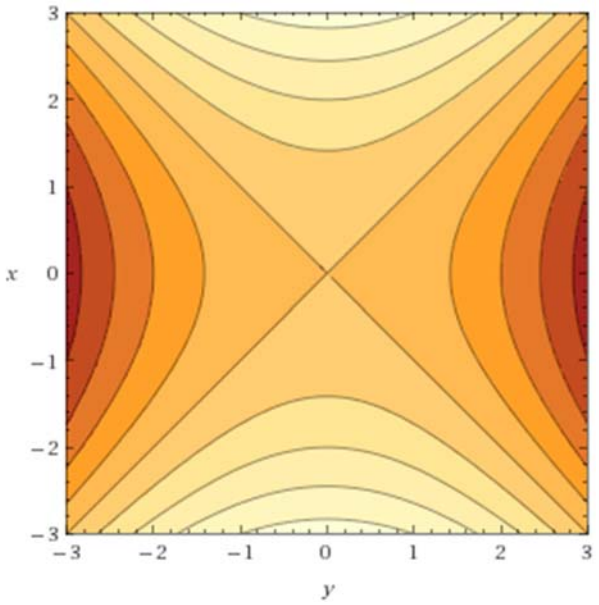
1) GRAPHING CALCULATOR 3D : http://www.runiter.com/graphing-calculator/
   La presentación es muy cuidada y la gráfica se puede girar con el puntero. Se puede hallar la intersección de la superficie con un plano y así ver las curvas de nivel. La versión gratis no permite imprimir las imágenes.

2) WOLFRAM ALPHA
   Hay que poner

   plot x^2-y^2, x=-2..2, y=-3..3

   para dibujar la función z=x^2+y^2 para valores de x entre -2 y 2 y valores de y entre -3 y 3. La superficie no se puede girar, pero da de propina las curvas de nivel.

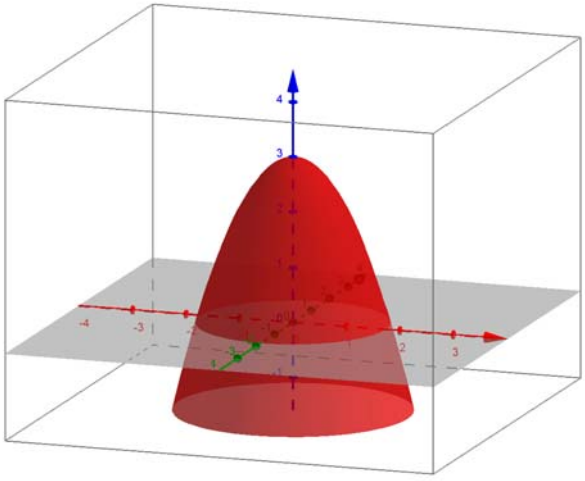




3) GEOGEBRA
   La versión 5.0 ya permite hacer gráficos 3D. Poner la ventana 3D con el menú que sale de la flecha que hay a la derecha del recuadro. Escribir la función, por ejemplo

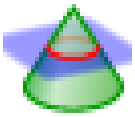
   –x^2-y^2+3

   en la línea de comandos. El resultado es:



La superficie se puede girar con el botón Rotar Vista 

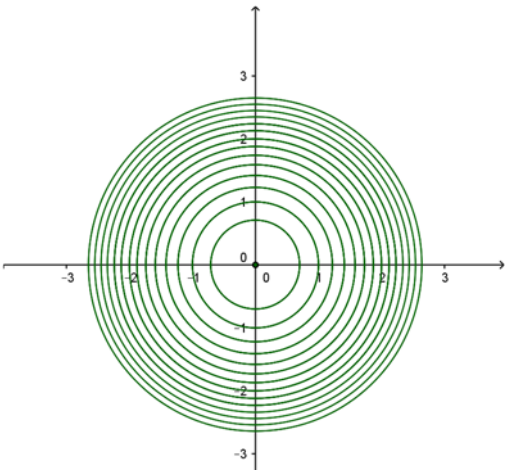
Se puede hallar la intersección de la superficie con un plano para ver las curvas de nivel.

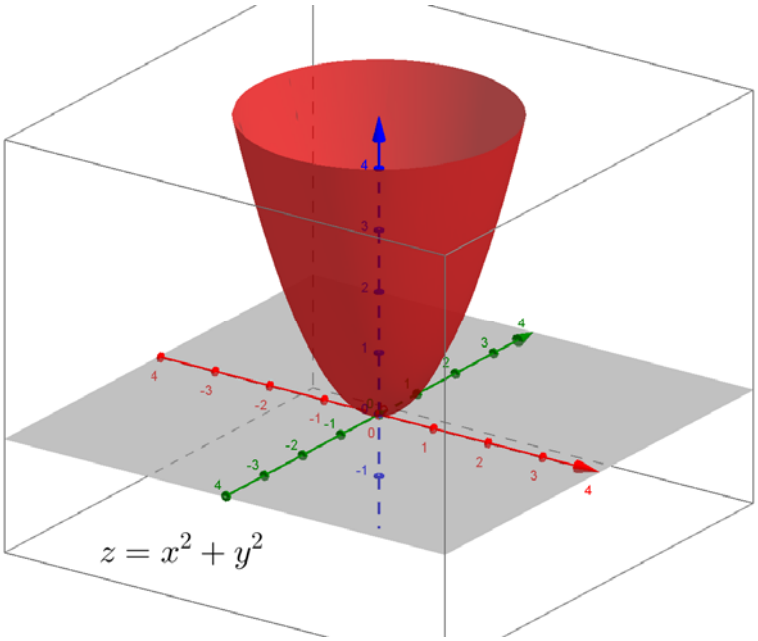
Hay que usar el comando : 

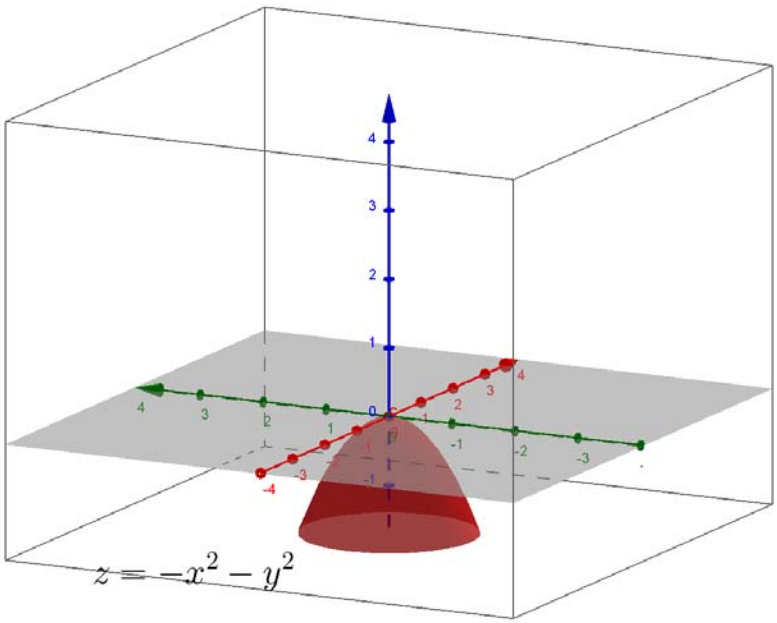
Pero para hacer curvas de nivel es mejor volver a la vista Álgebra y Gráficos y escribir el siguiente comando:

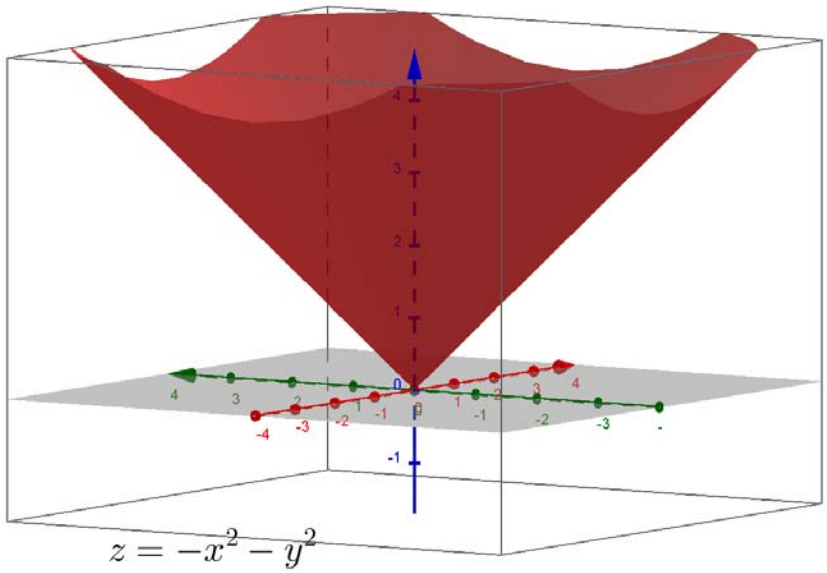
Secuencia[-x^2-y^2+3 = n, n, -4, 3, 0.5]

y produce:

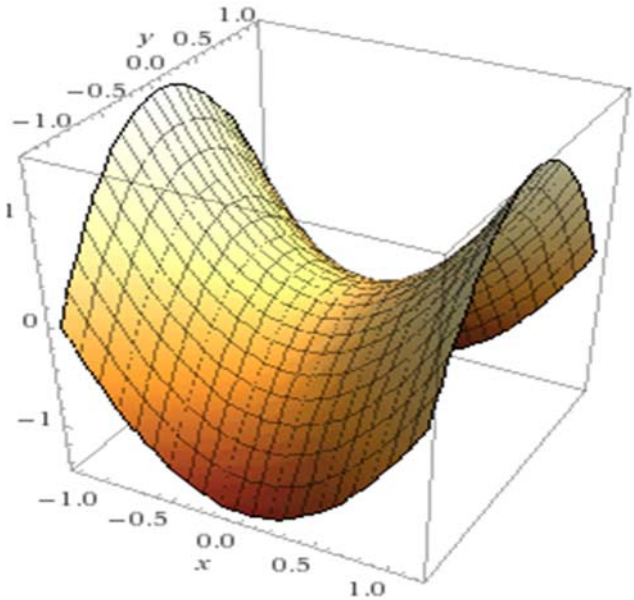



$z = x^2 + y^2$


$z = -x^2 - y^2$



$z = -x^2 - y^2$



$z = x^2 - y^2$