Sección 3.5: Ecuaciones diferenciales.

A veces no se conoce la función $y = f(x)$ que expresa la relación entre una variable respuesta y en términos de una variable explicativa x, pero se tiene conocimento (a veces aproximado) de la velocidad de variación de la función y con respecto a la variable x, es decir, se conoce $\dfrac{dy}{dx}$. El cálculo de integrales que hemos estudido puede usarse para hallar la función $y = f(x)$ en situaciones sencillas.

Una **ecuación diferencial** (de primer orden) es una igualdad de la forma

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y)\,, \tag{1}$$

donde $y = y(x)$ es la función incógnita. Una solución de esta ecuación diferencial es una función $y = y(x)$ que satisface (1). Una ecuación diferencial de primer orden tiene infintias soluciones, que varían con un parámetro C.

Para tener una sola solución es necesario especificar un dato inicial: el valor de $y(x)$ cuando $x = x_0$ es y_0, que se escribe

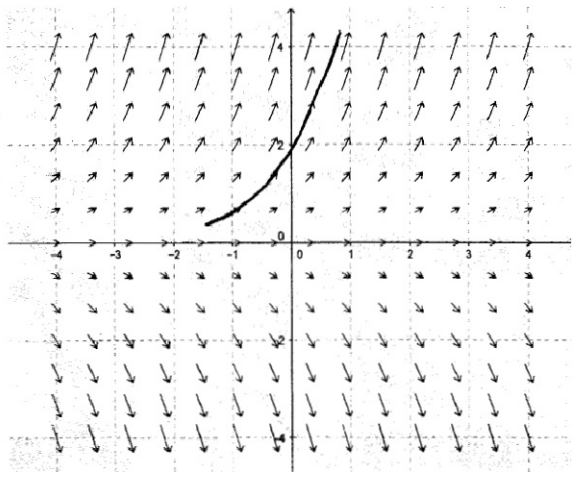
$$y(x_0) = y_0\,. \tag{2}$$

Para cada punto (x, y) del plano, la ecuación (1) da la pendiente de la función y en el punto x. En este punto, la solución de (1) debe ser tangente al vector $(1, F(x, y)$ ya que tienen la misma pendiente.

Esta observación nos invita a dibujar en un plano los vectores $(1, F(x, y))$ para algunos valores de (x, y) y tratar de ajustar a ellos las soluciones. El dibujo de los vectores en el plano se llama **campo de vectores** de la ecuación (1).

Para dibujar campos de vectores de una ecuación diferencial con GeoGebra © descarga la App que encontrarás en `www.geogebra.org/material/show/id/3051` (o busca "2D vector fields - GeoGebra ") y ábrela en GeoGebra.

Ejercicio 1: Dibujar el campo de vectores de la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = y$, y halla la solución que satisface $y(0) = 2$.



S./ Pon en la App "2D vector fields "del programa GeoGebra las expresiones $V_x(x, y) = 1$ y $V_y(x, y) = y$, y ajusta los parámetroes para obtener el campo de vectores de la figura de la derecha. En la figura se ha pintado un trozo de curva que pasa por el punto $(0, 2)$, que son las condiciones iniciales. Esta curva es tangente al campo de vectores. ¿Parece un trozo de exponencial? Se puede mostrar que lo es, porque puede hallarse la solución. Separar las variables para escribir $\dfrac{dy}{y} = dx$ y a continuación integrar:

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = x + C_1 \quad \Rightarrow \quad y = C_2 e^x \quad (\text{con } C_2 = \pm e^{C_1}).$$

Como $y(0) = 2$, se tiene $2 = C_2 e^0 = C_2$. Por tanto, $y = 2e^x$ es la solución buscada.

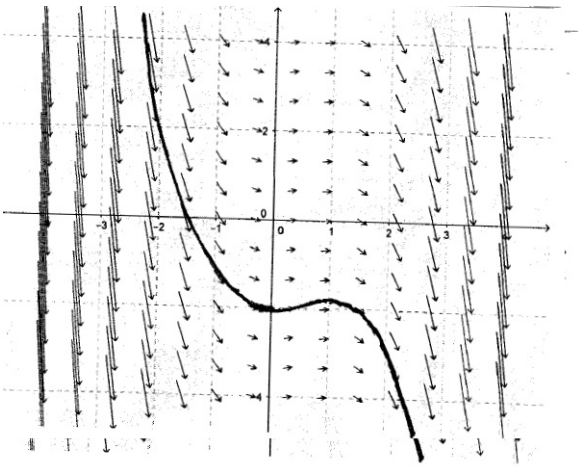
En esta sección estudiaremos las ecuaciones diferenciales (de primer orden) en las que $F(x, y) = f(x)g(y)$, que se llaman **ecuaciones diferenciales separables**. Para hallar la solución y a partir de la ecuación $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ se ponen a la izquierda todas las expresiones con la variable y, y a la derecha todas las expresiones con la variable x, para integrar a continuación:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx\,.$$

Se resuelven estas integrales indefinidas (si se puede), no olvidando añadir una constante a una de ellas (generalmente a la de la derecha). Se despeja la variable y en función de la variable x para obtener algo de la forma $y = G(x) + C$. El valor de la constante C se calcula usando el dato inicial.

Ejercicio 2: La velocidad de variación de y en función del tiempo t está dada por la ecuación $\frac{dy}{dt} = t(1-t)$. Se sabe, además, que cuanto $t = 0$, $y = -2$. Dibuja el campo de vectores (con Geogebra) y halla la función $y = f(t)$ que expresa y en función del tiempo.

S./ El campo de vectores de esta ecuación diferencial (sin la curva en él dibujada) es:



Se separan las variables y y t y se integra:

$$\frac{dy}{dt} = t(1-t) \quad \Rightarrow \quad dy = t(1-t)dt \quad \Rightarrow \int dy = \int (t - t^2)dt \quad \Rightarrow \quad y = \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} + C.$$

Como $y = -2$ cuando $t = 0$ se tiene $-2 = 0 + 0 + C \;\Rightarrow\; C = -2$. La solución de la ecuación diferencia es $y = \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - 2$. Esta es la curva dibujada sobre el campo de vectores.

Puedes comprobar que la solución es correcta sustituyendo en la ecuación diferencial - ¡No se te olvide hacerlo siempre!

Ejercicio 3: (Apartado ii) del ejercicio 1 de la hoja 6) Resuelve la ecuacion diferencial $\frac{dx}{dt} = \frac{tx}{1+t^2}$, con $x = 1$ para $t = 0$.

S./ Se separan las variables x y t y se integra:

$$\frac{dx}{x} = \frac{tdt}{1+t^2} \quad \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \frac{tdt}{1+t^2} \quad \Rightarrow \quad \ln|x| = \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + C.$$

Como $x = 1$ cuando $t = 0$, $\ln 1 = \frac{1}{2}\ln(1+0^2) + C = C \Rightarrow C = 0$. Por tanto, la solución es:

$$2\ln|x| = \ln(1+t^2) \quad \Rightarrow \quad \ln x^2 = \ln(1+t^2) \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{1+t^2}.$$

¡No olvides comprobar que el resultado es correcto! Además, dibuja, con GeoGebra © la solución, el campo de vectores de la ecuación diferencial, y observa como se ajustan.

Vamos a aplicar ahora el método que hemos aprendido de resolución de ecuaciones diferenciales al estudio de algunos modelos, como los que estudiamos en la sección 2.7.

Repasamos algunos:

1) Modelos en los que la variación $\dfrac{dy}{dt}$ es proporcional a la cantidad y, es decir:

$$\frac{dy}{dt} = ky \qquad \text{con} \qquad y(t_0) = y_0\,.$$

Puede aplicarse, por ejemplo, al crecimiento de bacterias por un corto periodo de tiempo y al estudio del decaimiento radioactivo.

2) Modelos en los que la variación $\dfrac{dy}{dt}$ es proporcional a la cantidad $A - y$, donde A es un valor fijo del cual no puede pasar el valor de y (como la capacidad de alojamiento de una población o la longitud de un pez). En este caso:

$$\frac{dy}{dt} = k(A-y) \qquad \text{con} \qquad y(t_0) = y_0\,.$$

3) Modelo de crecimiento de poblaciones en el que el crecimiento per cápita, $\dfrac{1}{N}\dfrac{dN}{dt}$, depende de la densidad de población. Es decir

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = r(1 - \frac{N}{K}) \qquad \text{con} \qquad N(t_0) = N_0\,.$$

La solución de esta ecuación diferencial se llama **logística**.

A continuación se proponen ejercicios en los que aparecen algunos de estos modelos, u otros más complicados. Hay más para practicar en la hoja de ejercicios 6.

Ejercicio 4: Un material radioactivo se elimina a una velocidad proporcional a la cantidad de material existente en cada momento. Su vida media es 1200 años.

a) ¿Qué porcentaje de material radioactivo queda después de 10 años?

b) ¿Cuantos años se requerirán para reducir la cantidad al 10% ?

S./ Sea $y(t)$ la cantidad de material radioactivo después de t años y pongamos $y(0) = y_0$. Se tiene:

$$\frac{dy}{dt} = ky \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = k \int dt \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = kt + C_1 \quad \Rightarrow \quad y = C_2 e^{kt} \text{ (con } C_2 = \pm e^{C_1}.)$$

Como $y(0) = y_0$ se tiene $y_0 = C_2 e^{k \cdot 0} = C_2$. Por tanto la solución de la ecuación diferencial es $y(t) = y_0 e^{kt}$.

Usando que su vida media es 1200 años se puede calcular k:

$$\frac{1}{2} y_0 = y_0 e^{k \cdot 1200} \quad \Rightarrow \quad e^{k \cdot 1200} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad k = -\frac{\ln 2}{1200}.$$

La solución de la ecuación diferencial es:

$$y(t) = y_0 e^{-\frac{\ln 2}{1200} t}.$$

a) Después de 10 años,

$$y(10) = y_0 e^{-\frac{\ln 2}{1200} 10} \approx y_0 (0,9942).$$

Por tanto, el porcentaje de material radioactivo que queda después de 10 años es el $99,42\%$ de la cantidad inicial.

b) Hay que hallar t para que $y(t) = 10\%$ de $y_0 = 0,1 y_0$. Entonces,

$$0,1 y_0 = y_0 e^{-\frac{\ln 2}{1200} t} \quad \Rightarrow \quad e^{-\frac{\ln 2}{1200} t} = 0,1 \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{1200 \ln 0,1}{\ln 2} \quad \Rightarrow \quad t \approx 3986,31.$$

Se necesitan $3986,31$ años, aproximadamente, para que la cantidad se reduzca al 10% de la cantidad original.

Ejercicio 5: (Ejercicio 6 de la hoja 6) De acuerdo con la ley de enfriamiento de Newton, la temperatura $T(t)$ de un objeto introducido en un ambiente más frio con temperatura constante A grados varía a una velocidad proporcional a $T(t) - A$ (el exceso de temperatura). Un médico forense mide la temperatura de un cadáver que resulta ser 29,4 grados centígrados. Dos horas después vuelve a medirla y resulta ser 23'3 grados centígrados. Si la temperatura ambiente es 20 grados centígrados ¿Cuánto tiempo hace que murió la persona contando desde la primera medición? (Nota: tomar como temperatura corporal en el momento del fallecimiento 36,7 grados centígrados.)

Ejercicio 6: (Ejercicio 8 de la hoja 6) Durante una epidemia de gripe en una población, la velocidad de propagación de la enfermedad, es decir, la velocidad de variación del número de enfermos es (aproximadamente): $v(t) = 1000\ t\ e^{-0,5t}$ donde t es el número de días desde el inicio de la epidemia.

(a) Utilizado la regla del trapecio con dos intervalos, calcula (aproximadamente) el número de individuos que se ponen enfermos durante los cuatro primeros días. Compara este valor con el valor exacto.

(b) ¿En qué momento es máxima la velocidad de propagación de la gripe?