Sección 3.3: Aproximación numérica de integrales definidas.

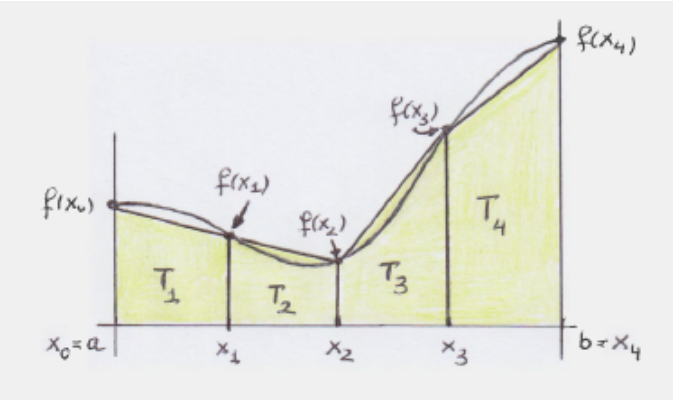
Hay funciones de las que no se puede hallar una primitiva en términos de funciones elementales. Esto sucede, por ejemplo, con las funciones e^{-x^2}, $\operatorname{sen} x^2$, y $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$. Aún asi, es posible hacer un cálculo aproximado de la integral definida usando métodos de integración numérica. En esta sección se expondrán las **reglas del trapecio y de Simpson** para realizar esta tarea.

La regla del trapecio.

Queremos calcular aproximadamente la integral definida $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$. Para ello dividimos el interevalo $[a,b]$ en n partes iguales, cada una de longitud $h = \dfrac{b-a}{n}$, obteniéndose los puntos

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots\cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

La figura muestra el caso $n = 4$.



Se forman los trapecios de la figura y se utiliza la suma de las áreas de todos los trapecios $T_1, T_2, \ldots, T_n$ para aproximar la integral. Recuerda que el área de un trapecio es el producto de la semisuma de sus lados paralelos por la altura. Se obtiene:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \text{Área}\,(T_1) + \text{Área}\,(T_2) + \ldots\cdots + \text{Área}\,(T_n)$$

$$= \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + \ldots\ldots \frac{h}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$\frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots\ldots 2f(x_{n-1}) + f(x_n)] = \mathcal{T}_n,$$

que es la regla del trapecio para calcular la integral definida de forma aproximada. Cuanto más grande sea n mejor será la aproximación.

Ejercicio 1: Utiliza la regla del trapecio con $n = 4$ para aproximar el valor de $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$ y compara el resultado con el valor exacto.

S./ Dividiendo el intervalo $[0,1]$ en cuatro subintervalos iguales, cada uno de ellos tiene longitud $n = 1/4 = 0,25$ y los puntos de división son $x_0 = 0, x_1 = 1/4, x_2 = 1/2, x_3 = 3/4, x_4 = 1$. Con la regla del trapecio se obtiene:

$$\int_0^1 x^2\,dx \approx \frac{0,25}{2}\Big[0 + 2(\frac{1}{4})^2 + 2(\frac{1}{2})^2 + 2(\frac{3}{4})^2 + 1\Big] \approx 0,34375.$$

El valor exacto es $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx = \Big[\frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{3}$, por lo que el error es $E_4 = |\frac{1}{3} - 0,34375| < 0,0105$.

Ejercicio 2: Se quiere calcular aproximadamente el valor de $P = \displaystyle\int_{260}^{300} \frac{1}{20}\, e^{-\frac{(x-240)^2}{2(20)^2}}\,dx$. Para ello, realiza el cambio de variable $y = (x-240)/20$ y usa la regla del trapecio con 4 subintervalos.

S./ Como $y = (x-240)/20$ se tiene $dy = dx/20$. Entonces $P = \displaystyle\int_1^3 e^{-y^2/2}\,dy$. El intervalo $[1,3]$ se divide en cuatro subintervalos, cada uno de ellos de longitud $h = 0,5$ con extremos en

$$x_0 = 1,\ x_1 = 1,5,\ x_2 = 2,\ x_3 = 2,5,\ x_4 = 3.$$

Por tanto,

$$P \approx \mathcal{T}_4 = \frac{0,5}{2}\Big[e^{-1/2} + 2e^{-(1,5)^2/2} + 2e^{-(2)^2/2} + 2e^{-(2,5)^2/2} + e^{-(3)^2/2}\Big] \approx 0,406375.$$

Ejercicios: Se pueden hacer ahora el ejercicios 8 y el apartado a) del ejercicio 9 de la hoja 5.

Opcional : Análisis del error en la regla del trapecio.

En el ejemplo 1 se ha podido comparar el error entre el valor exacto de la integral y la aproximación con la regla del trapecio, porque se sabe calcular la integral de la función $f(x) = x^2$. Esto no es posible en el ejemplo 2. En este caso puede obtenerse una estimación del error con la siguiente fórmula:

$$E = \Big|\int_a^b f(x)\,dx - \mathcal{T}_n\Big| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}K,$$

donde

$$K = \max_{[a,b]} |f''(x)|\,,$$

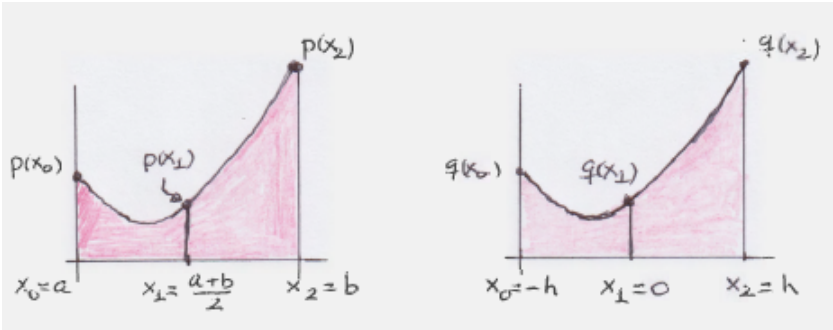
cuando f'' existe y es continua en el intervalo $[a,b]$.

Ejercicio 3: Puedes dedicar un poco de tiempo a hacer el siguiente ejercicio. Halla un valor de n para que la regla del trapecio con n subintervalos aproxime el valor de $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$ con un error inferior a $0,01$.. Te tiene que salir que $n = 3$ es suficiente.

La regla de Simpson.

En la regla del trapecio la función se aproxima en cada intervalo por un segmento. En la regla de Simpson (Thomas Simpson, 1710-1761) se usa un polinomio de grado 2. Lo primero que hay que hacer es aprender a **calcular el área bajo una parábola** $p(x) = Ax^2 + Bx + C$ en un intervalo $[a, b]$ usando solo los valores de $p(x)$ en los extremos del intervalo y en el punto medio. Pongamos $h = (b - a)/2$, $x_0 = a$, $x_1 = (a + b)/2$ (el punto medio) y $x_2 = b$. Entonces

$$\int_a^b p(x)\,dx = \frac{h}{3}[p(x_0) + 4p(x_1) + p(x_2)]. \tag{1}$$



Para demostrar la fórmula (1) se traslada la parábola hasta que el centro del intervalo esté en el origen de coordenadas (figura de la derecha). El area no ha cambiado, pero la parábola tendrá ahora otra equación $q(x) = ax^2 + bx + c$. En este caso lo que tenemos que probar es:

$$\int_{-h}^h q(x)\,dx = \frac{h}{3}[q(-h) + 4q(0) + q(h)]. \tag{2}$$

La parte izquierda de (2) es:

$$\int_{-h}^h q(x)\,dx = \int_{-h}^h (ax^2 + bx + c)\,dx = \frac{2ah^3}{3} + 2ch.$$

Para calcular la parte derecha de (2) se observa que

$$q(-h) = ah^2 - bh + c, \qquad q(0) = c \qquad \text{y} \qquad q(h) = ah^2 - bh + c.$$

Por tanto,

$$\frac{h}{3}[q(-h) + 4q(0) + q(h)] = \frac{h}{3}[2ah^2 + 2c + 4c] = \frac{2ah^3}{3} + 2ch.$$

Esto prueba que ambos lados de la fórmula (2) coinciden.

Regla de Simpson para $n = 2$ intervalos

El intervalo $[a, b]$ de divide en dos intervalos de igual longitud $h = (b - a)/2$ usando los puntos $x_0 = a$, $x_1 = (a+b)/2$ y $x_2 = b$. La integral definida $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ se aproxima por la integral definida del polinomio de grado 2 que pasa por los puntos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, y $(x_2, f(x_2))$. Esta integral se calcula con la fórmula (1) y se obtiene:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] = \mathcal{S}_2. \tag{3}$$

Regla de Simpson para $n = 4$ intervalos

El intervalo $[a, b]$ se divide en cuatro intervalos iguales cada uno de ellos de longitud $h = (b-a)/4$ con extremos en los puntos

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 = b.$$

En el intervalo $[x_0, x_2]$ se aplica la regla de Simpson con $n = 2$ y $h = (x_2 - x_0)/2 = (b - a)/4$ para obtener

$$\frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)].$$

En el intervalo $[x_2, x_4]$ se aplica la regla de Simpson con $n = 2$ y $h = (x_4 - x_2)/2 = (b - a)/4$ para obtener

$$\frac{h}{3}[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)].$$

Sumando ambos resultado se obtiene la regla de Simpson para cuatro intervalos:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] = \mathcal{S}_4. \tag{4}$$

Regla de Simpson para n intervalos.

Siguiendo este procedimiento puede obtenerse la regla de Simpson cuando el intervalo $[a.b]$ se divide con los puntos

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots\ldots x_{n-1} < x_n = b$$

en n intervalos de igual longitud $h = (b - a)/n$. El resultado que se obtiene es:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \ldots\cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)] = \mathcal{S}_n. \tag{5}$$

Ejercicio 4: Utiliza la regla de Simpson con 4 intervalos para aproximar el valor de la integral definida $\displaystyle\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx$ y compara el resultado con el valor exacto.

S./ El intervalo $[0, 4]$ se divide en cuatro partes iguales, cada una de ellas de longitud $h = \pi/4$ con los puntos

$$x_0 = 0, \qquad x_1 = \frac{\pi}{4}, \qquad x_2 = \frac{\pi}{2}, \qquad x_3 = \frac{3\pi}{4}, \qquad x_4 = \pi.$$

Se tiene:

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx \approx \mathcal{S}_4 = \frac{\pi/4}{3}\big[\operatorname{sen} 0 + 4\operatorname{sen}(\pi/4) + 2\operatorname{sen}(\pi/2) + 4\operatorname{sen}(3\pi/4) + \operatorname{sen}\pi\big] \approx 2,0046$$

El valor exacto es

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^\pi = 2$$

por lo que el error de la aproximación es $\approx 0,0046$

Ejercicio 5: Usa la regla de Simpson con cuatro intervalos para calcular aproximadamente el valor de $\displaystyle\int_5^7 \frac{1}{2}e^{-\frac{(x-5)^2}{8}}\,dx$, haciendo antes el cambio de variable $y = (x - 5)/2$.

S./ Como $y = (x-5)/2$ deducimos $dy = dx/2$. Entonces $\displaystyle\int_0^1 e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy$. Se divide el intervalo $[0,1]$ en cuatro intervalos cada uno de ellos de longitud $h = 1/4 = 0,25$ con los puntos

$$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{4},\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = \frac{3}{4},\ x_4 = 1.$$

Se tiene

$$P \approx \mathcal{S}_4 = \frac{0,25}{3}\Big[e^{-0} + 4e^{-1/32} + 2e^{-1/8} + 4e^{-9/32} + e^{-1/2}\Big] \approx 0,85565\,.$$

Ejercicios: Se pueden hacer ahora el apartado b) del ejercicio 9 y el ejercicio 10 de la hoja 5.

Opcional : Análisis del error en la regla de Simpson.

Supongamos que la función f tiene cuatro derivadas continuas en el intervalo $[a,b]$ y sea

$$K = \max_{[a,b]} |f^{(iv)}(x)|\,.$$

El error que se produce al aproximar $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ por $\mathcal{S}_n$ satisface:

$$E = \Big|\int_a^b f(x)\,dx - \mathcal{S}_n\Big| \le \frac{(b-a)^5}{180n^4}K.$$

Ejercicio 6: Puedes dedicar un poco de tiempo a hacer el siguiente ejercicio. Halla un valor de n para que la regla de Simpson con n subintervalos aproxime el valor de $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ con un error inferior a $0,01$.. Te tiene que salir que $n = 2$ es suficiente.

Ejercicio 7: a) Programa en Excel © la regla del trapecio para $n = 8$ y $n = 16$ intervalos. Usa la función $f(x) = 2e^{-x^2}$ y deja los extremos de integración a y b como parámetros variables.

b) Haz una tablade 20 valores aproximados de $\int_0^b 2e^{-x^2}\,dx$ para $b = 1, 2, \ldots, 20$ usando la regla del trapecio para $n = 8$ y $n = 16$.

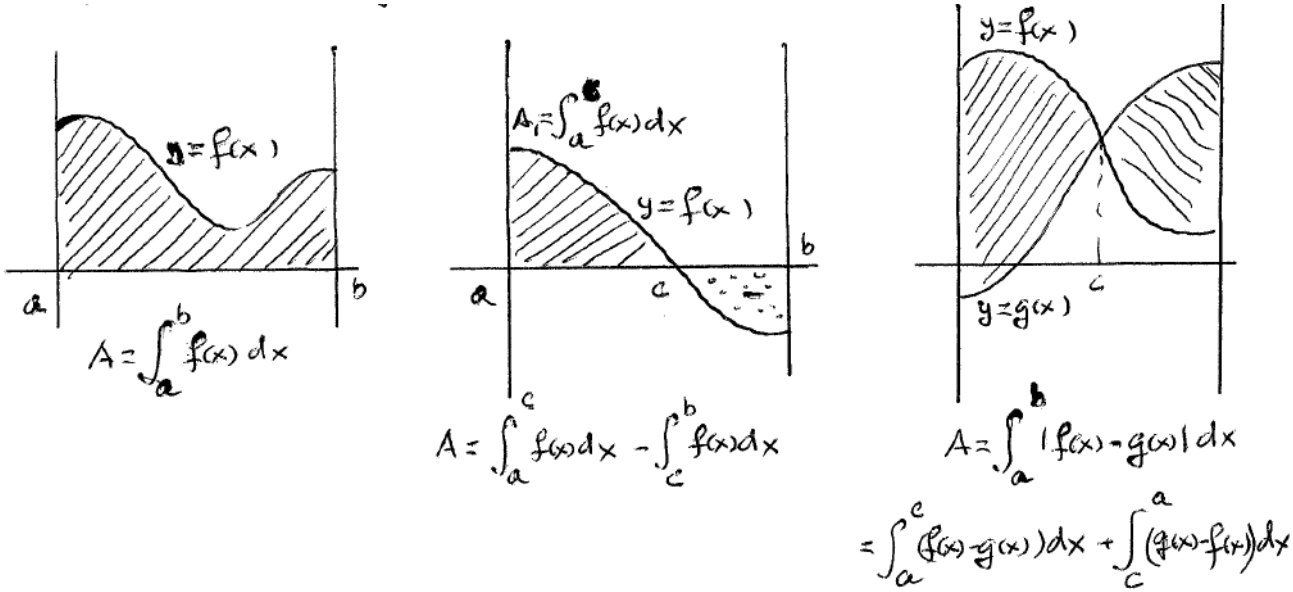
(Notas. i) En ambos casos del apartado b), cuando b aumenta, el valor de la integral debe acercarse a $\sqrt{\pi}$. ii) En Excel © la función exponencial se excribe EXP.

Ejercicio 8: a) Programa en Excel © la regla de Simpson para $n = 8$ y $n = 16$ intervalos. Usa la función $f(x) = \sqrt{x^3 - 1}$ y deja los extremos de integración a y b como parámetros variables.

b) Haz una tabla de 16 valores aproximados de $\int_1^b \sqrt{x^3-1}\,dx$ para $b = 5, 6, \ldots, 20$ usando la regla de Simpson para $n = 8$ y $n = 16$.

Sección 3.4: Aplicaciones de la integral definida.

Una de las aplicaciones de la integral definida es el cálculo de áreas limitadas por gráficas de funciones. Para ello es necesario dibujar sus gráficas.

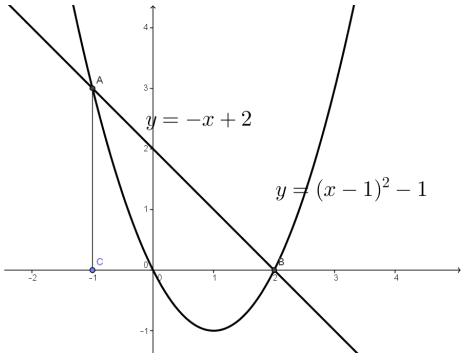


El área limitada por la gráfica de una función positiva y el eje OX en el intervalo $[a, b]$ se calcula con la integral, como se indica en la figura de la izquierda.

Para hallar el área limitada por la gráfica de una funcion no necesariamente positiva y el eje OX en el intervalo $[a, b]$, se identifican los puntos en los que la gráfica de la función corta al eje OX y se calcula cada una de las integrales teniendo en cuenta que la integral por debajo del eje OX hay que tomarla negativa (ver la figura del centro).

Para hallar el área limitada por la gráfica de dos funciones f y g se hallan los puntos de corte entre si y se escriben las integrales correspondientes de manera que el resultado de cada una de ellas sea siempre positivo (ver la figura de la derecha).

Ejercicio 1: Calcular el área de la región comprendida entre las gráficas de las funciones $y = (x-1)^2 - 1$ e $y = -x + 2$.



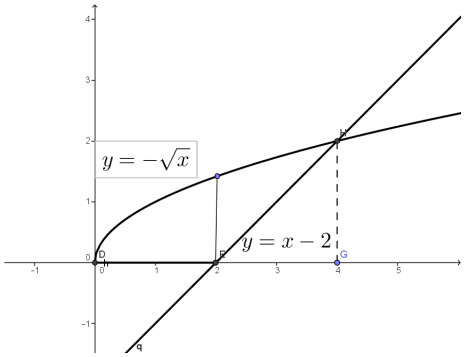
S./ La gráfica de $y = (x-1)^2 - 1$ es como la de la parábola $y = x^2$ desplazada una unidad hacia la derecha y una unidad hacia abajo. La gráfica de $y = -x + 2$ es una recta de pendiente -1. Los puntos de corte de ambas gráficas se obtienen igualando las ecuaciones: $(x-1)^2 - 1 = -x + 2$. Esta ecuacón de segundo grado tiene como soluciones $x = -1$ y $x = 2$. Estas son las abcisas de los puntos de corte. Como la recta está por encima de la parábola en el intervalo $[-1, 2]$ el área de la figura limitada por estas gráficas se calcula con la siguiente integral:

$$A = \int_{-1}^{2} [(-x+2) - ((x-1)^2 - 1]dx.$$

Esta integral definida se calcula fácilmente. El área pedida es $9/2$ uc.

Ejercicio 2: Calcula el área de la región comprendida entre las curvas $y = \sqrt{x},\ y = x - 2$ y el eje OX.

S./ El punto de corte de las gráficas de $y = \sqrt{x}$ e $y = x-2$ se obtiene resolviendo la ecuación $\sqrt{x} = x - 2$. Después de elevar al cuadrado se obtienen como soluciones $x = 4, x = 1$. Mirando el gráfico se observa que el valor correcto es $x = 4$. El área buscada hay que calcularla con dos integrales definidas, una sobre el intervalo $[0, 2]$ y la otra sobre el intervalo $[2, 4]$. En este último caso la función que se integra es la diferencia entre $y = \sqrt{x}$ e $y = x - 2$. Por tanto:

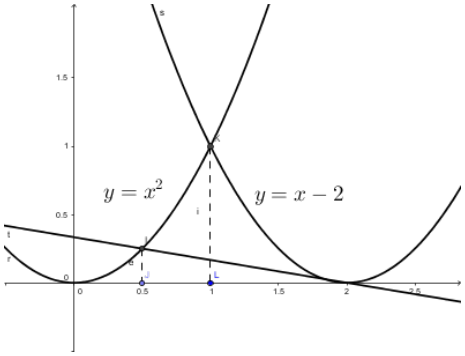


$$A = \int_0^2 \sqrt{x}\, dx + \int_2^4 [\sqrt{x} - (x - 2)]\, dx\,.$$

Estas integrales son fáciles de calcular. El área buscada es $10/3$ *uc*.

Ejercicio 3: Calcular el área delimitada por las curvas $y = x^2,\ y = (x - 2)^2$ e $y = (2 - x)/6$.

S./ El punto de corte de la recta con la parábola $y = x^2$ tiene abcisa $x = 0,5$.. El punto de corte de las dos parábolas tiene abcisa $x = 1$. El punto de corte de la recta y la parábola tiene abcisa $x = 2$. Mirando a la figura se deduce que el cálculo del área tiene que hacerse con dos integrales:



$$A = \int_{0,5}^1 (x^2 - \frac{2-x}{6})\, dx + \int_1^2 ((x-2)^2 - \frac{2-x}{6})\, dx.$$

Estas integrales son fáciles de calcular. El área buscada es aproximadamente $0,9792$ *uc*.

La integral puede usarse para hallar la **diferencia de población** entre dos instantes, si se conoce la velocidad $v(t)$ con la que la población varía a lo largo del tiempo. Llamamos $N(t)$ a la función que representa el número de individuos de la población en el instante t. Es decir, tenemos $N'(t) = v(t)$. Por la regla de Barrow se tiene:

$$N(b) - N(a) = \int_a^b N'(t)\, dt = \int_a^b v(t)\, dt,$$

lo que nos permite calcular la diferencia de población entre los instantes $t = a$ y $t = b$, si sabemos calcular la integral de la derecha.

Ejercicio 4: (Ejercicio 3 de la hoja 6.) El tamaño $N(t)$ de una población varía a lo largo del tiempo. Su velocidad de variación viene dada por:

$$v(t) = \frac{30\, e^{-0'1t}}{(1 + 3\, e^{-0'1t})^2} \qquad (t\text{=“tiempo en años”}).$$

a) Calcular la variación de la población entre $t = 0$ y $t = 20$: obtener el resultado exacto y el resultado aproximado utilizando la regla del trapecio y la regla de Simpson con 2 subintervalos.

b) Si $N(0) = 25$. ¿cuál es el tamaño de la población al cabo de 20 años?

S./ a) Hay que calcular

$$N(20) - N(0) = \int_0^{20} \frac{30e^{0,1t}}{(1+3e^{-0,1t})^2}\, dt.$$

Hacemos el cambio de variable $1 + 3e^{-0,1t} = u$. Se tiene $-0,3e^{-0,1t}dt = du$:

$$\int \frac{30e^{0,1t}}{(1+3e^{-0,1t})^2}\, dt = -100 \int \frac{du}{u^2} = \frac{100}{u} + C = \frac{100}{1+3e^{-0,1t}} + C.$$

Entonces

$$N(20) - N(0) = \left[\frac{100}{1+3e^{-0,1t}}\right]_0^{20} \approx 46,12345.$$

Con la regla del trapecio para $n = 2$, $h = 20/2 = 10$,

$$N(20) - N(0) \approx \mathcal{T}_2 = \frac{10}{2}\left[\frac{30}{4^2} + 2\frac{30\, e^{-0'1\cdot 10}}{(1+3\, e^{-0'1\cdot 10})^2} + \frac{30\, e^{-0'1\cdot 20}}{(1+3\, e^{-0'1\cdot 20})^2}\right] \approx 44,583.$$

Con la regla del Simpson para $n = 2$, $h = 20/2 = 10$,

$$N(20) - N(0) \approx \mathcal{S}_2 = \frac{10}{3}\left[\frac{30}{4^2} + 4\frac{30\, e^{-0'1\cdot 10}}{(1+3\, e^{-0'1\cdot 10})^2} + \frac{30\, e^{-0'1\cdot 20}}{(1+3\, e^{-0'1\cdot 20})^2}\right] \approx 46,348.$$

b) Ya se ha obtenido en el apartado a) que $N(20) - N(0) = 46,12345$. Por tanto, $N(20) = N(0) + 46,12345 = 25 + 46,12345 = 71,12345$.