Sección 2.7: Modelos de evolución.

Un modelo de evolución trata de expresar el comportamiento de una variable con el paso del tiempo mediante una función sencilla.

Modelo de evolución lineal.

El modelo de evolución más sencillo es el **modelo lineal**. En un modelo lineal cada unidad de tiempo que pasa, la variable respuesta varía una cantidad fija d, que puede ser una cantidad positiva o negativa. Si escribimos y_0 para representar el valor de la variable y al comienzo del estudio, se tendría:

$$t = 0 \Rightarrow y = y_0$$

$$t = 1 \Rightarrow y = y_1 = y_0 + d$$

$$t = 2 \Rightarrow y = y_2 = y_1 + d = y_0 + 2d$$

$$t = 2 \Rightarrow y = y_3 = y_2 + d = y_0 + 3d.$$

En general, depués de t periodos

$$y = f(t) = y_t = y_0 + td.$$

La gráfica de esta función es una recta de pediente d.

En algunos casos es necesario conocer el valor de la suma de los valores de la variable respuesta en los instantes $t = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$. Es decir, la suma $S = y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1} + y_n$. Escribimos

$$S = y_0 + (y_0 + d) + \cdots + (y_n - d) + Y_n$$

$$S = y_n + (y_n - d) + \cdots + (y_0 + d) + Y_0.$$

Sumando ambos miembros de estas igualdades se tiene:

$$2S = (y_0 + y_n) + (y_0 + y_n) + \cdots + (y_0 + y_n) + (y_0 + y_n) = (n + 1)(y_0 + y_n).$$

Por tanto

$$S = \frac{y_0 + y_n}{2}(n + 1).$$

Modelo de evolución exponencial.

Un modelo de evolución muy común en el crecimiento de poblaciones es el **modelo exponencial**. En este modelo por cada unidad de tiempo que pasa, la variable respuesta aumenta un porcentaje $\alpha\%$ de su valor en el periodo inmediatamente anterior. Si $\alpha > 0$ la población crece y si $\alpha < 0$ la población decrece. Se tiene:

$$y(t) = y(t-1) + \frac{\alpha}{100}y(t-1) = y(t-1)(1 + \frac{\alpha}{100}).$$

Llamando y_0 al valor inicial, se tiene

$$y(0) = y_0$$

$$y(1) = y_0(1 + \frac{\alpha}{100})$$

$$y(2) = y_1(1 + \frac{\alpha}{100}) = y_0(1 + \frac{\alpha}{100})^2.$$

En general, en el periodo t,

$$y(t) = f(t) = y_0(1 + \frac{\alpha}{100})^t.$$

Con $r = 1 + \frac{\alpha}{100}$ podemos escribir

$$y(t) = y_0 r^t = y_0 e^{\ln r^t} = y_0 e^{t \ln r}.$$

La exponencial que aparece en esta fórmula es la razón por la que este modelo de evolución se llama exponencial.

La suma de los valores de una variable respuesta que se describe con un modelo exponencial es:

$$S = y_0 + y_0 r + y_0 r^2 + \cdots + y_0 r^n.$$

Para hacer esta suma multiplicamos ambos miembros de la igualdad por r para obtener:

$$Sr = y_0 r + y_0 r^2 + \cdots + y_0 r^n + y_0 r^{n+1}.$$

Ahora se resta a esta igualdad la anterior para tener:

$$Sr - S = y_0 r^{n+1} - y_0 \qquad \Rightarrow \qquad S = y_0 \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}.$$

Ejercicio 1: Una población de 100 gatos monteses crece aproximadamente un 3% cada año.

(a) Escribe una fórmula para calcular la población aproximada de gatos monteses después de n años.

(b) ¿Cuántos gatos monteses habrá tras 25 años?

(c) ¿Cuántos años se necesitarian para tener al menos 1000 gatos monteses?

R./ (a) Después de n años la población de gatos monteses será aproximadamente $y_n = 100(1,03)^n$.

(b) Hay que calcular $y(25) = 100(1,03)^2 5 \approx 209$ gatos monteses.

(c) Hay que hallar el menor n para que $y(n) \geq 1000$. Es decir se debe cumplir $1000 \leq 100(1,03)^n$. Se despeja n tomando logaritmos neperianos y se llega a la conclusión que se necesitan al menos 78 años.

Ejercicio 2: En el vertedero de basura de Valdemingómez se ha observado que cada año los camiones de la CAM depositan un 5% más de basura que el año anterior. Como la basura no se retira, se va acumulando.

a) Escribir una función que exprese la cantidad de basura depositada cada año por los camiones de la CAM en el vertedero.

b) Encontrar una fórmula que de la cantidad de basura acumulada en el vertedero al cabo de n años.

c) Si inicialmente el vertedero estaba vacío y al cabo de un año contenía 1000 toneladas de basura, calcular cuantos años han de pasar para que la basura acumulada supere las 90.000 toneladas.

R./ (a) Si B_0 es la cantidad inicial de basura, la cantidad de basura $B(n)$ que se deposita el año n se calcula con la fórmula $B(n) = B_0(1,5)^n$.

(b) Hay que hacer la suma:

$$S = B_0 + B_1(1,05) + \cdots + B_n(1,05)^n.$$

Usando la fórmula dada antes del Ejemplo 1 se tiene:

$$S = B_0 \frac{(1,05)^{n+1} - 1}{1,05 - 1} = B_0 \frac{(1,05)^{n+1} - 1}{0,05}.$$

(c) Escribamos $B_1 = 1000$ toneladas en el año 1. Hay que hallar el menor n para que

$$1000 \frac{(1,05)^{n+1} - 1}{0,05} \geq 90.000.$$

El valor de n se calcula tomando logaritmos neperianos en ambos lados. Se obtiene que son necesarios 35 años para que se acumulen 90.000 toneladas de basura.

Evolución exponencial con eliminación o aumento fijo.

En este modelo la evolución de la población $y(n)$ en la generación n aumenta o disminuye un porcentaje $\alpha\%$ con respecto a la generación anterior, y además se permite la eliminación o aumento de una cantidad fija A de individuos en cada generación.

El modelo matemático es el siguiente:

$$y(0) = y_0$$

$$y(1) = y_0(1 + \frac{\alpha}{100}) - A = y_0 r - A \quad \text{con} \quad r = 1 + \frac{\alpha}{100}$$

$$y(2) = y_1 r - A = [y_0 r - A]r - A = y_0 r^2 - A[r + 1]$$

$$y(3) = y_2 r - A = y_0 r^3 - A[r^2 + r + 1]\,.$$

Siguiendo este procedimiento, al final de la generación n tendremos:

$$y(n) = y_0 r^n - A[r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + r + 1]\,.$$

Para hacer la suma de la serie geométrica

$$S = 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-2} + r^{n-1}$$

multiplicamos por r esta igualdad para obtener:

$$Sr = r + r^2 + \cdots + r^{n-1} + r^n\,.$$

Restamos ahora la primera igualdad de la segunda y se obtiene:

$$Sr - S = r^n - 1 \quad \Rightarrow \quad S = \frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

Entonces,

$$y(n) = y_0(1 + \frac{\alpha}{100})^n - A\frac{(1 + \frac{\alpha}{100})^n - 1}{\frac{\alpha}{100}}\,,$$

que es el modelo que permite calcular la población en la generación n en esta situación.

Se describe a continuación algunas situaciones en las que aparece de manera natural este modelo:

1) Una población crece un $\alpha\%$ cada año y al final del año se permite la caza de A individuos.

2) La masa forestal de un bosque disminuye un $\alpha\%$ cada mes y se replantan A árboles mensualmente.

3) Un cultivo de bacterias crece un $\alpha\%$ cada hora y se inyecta un medicamento del que se sabe que cada dosis elimina A bacterias por hora.

4) Un préstamos de un capital de C euros al $\alpha\%$ de interés anual se quiere devolver pagando una mensualidad fija de L euros. En este caso podemos estar interesados en saber cuantos años tardariamos en pagar el préstamo o cual sería la mensualidad para pagar el préstamo en un número fijo de años.

Ejercicio 3 :(**Explotacion forestal**) Una masa forestal de un bosque dsiminuye de forma natural un $0,5\%$ cada mes. Por otro lado, se plantn 10 árboles cada mes. Se comienza con 1000 árboles.

(a) Sin hacer cálculos, ¿aumenta o disminuye la cantidad de árboles?

(b) ¿Cuántos árboles tendrá el bosque tras 24 meses?

(c) ¿Cuántos años se necesitarían para que el bosque tuviera 1500 árboles?

R./ (a) Aumenta, porque al principio solo mueren 5 al mes y se plantan 10.

(b) Si $y(n)$ es la cantidad de árboles tras n meses, con la fórmula obtenida anteriormente podemos escribir:

$$y(n) = 1000(1-0,005)^n + 10\frac{(1-0,005)^n - 1}{-0,005}\,.$$

Observa que en este caso $\alpha = -0,5\%$ y que $A = -10$ ya que se plantan 10 árboles. Entonces

$$y(24) = 1000(0,995)^{24} + 10\frac{(0,995)^{24} - 1}{-0,005} \approx 1113 \text{ árboles}\,.$$

(c) Para alcanzar 1500 árboles necesitamos calcular el menor n (en meses) tal que $y(n) \geq 1500$. Es decir,

$$y(24) = 1000(0,995)^n + 10\frac{(0,995)^n - 1}{-0,005} \geq 1500.$$

Se resuelve esta desigualdad tomando logaritmos neperianos cuidadosamente. Se tardaria 139 meses (es decir, 11 años y 7 meses) en llegar a tener 1500 árboles en el bosque.

Ejercicio 4: (**Bacterias y antibióticos**) Se sabe que un cultivo de bacterias crece un 6% cada hora y que inicialmente hay 2000 bacterias.

(a) Escribe una fórmula para calcular el número de bacterias tras n horas. ¿Cuándo se alcanzará una población de 1 millon de bacterias?

(b) Se inyecta cada hora en la colonia de bacterias un antibiótico del que se sabe que cada dosis elimina 200 bacterias. Escribe una fórmula para calcular el número de bacterias tras n horas. ¿Desaparcecerá la población de bacterias? ¿En cuanto tiempo?

R./ (a) Si $y(n)$ es el número de bacterias tras n horas, la fórmula es $y(n) = 2000(1,06)^n$. Ahora queremos hallar n para que $y(n) \geq 10^6$. Tomando logaritmos se concluye que se necesitan 107 horas.

(b) En este caso lá fórmula es:

$$y(n) = 2000(1,06)^n - 200\frac{(1,06)^n - 1}{0,06}\,.$$

La población desaparecerá con el tiempo porque al comienzo aumenta un 6% de 2000, que es 120, mientras que se eliminan 200 bacterias. Ahora hay que calcular el menor n que haga $y(n) \leq 0$, es decir:

$$2000(1,06)^n - \frac{200}{0,06}(1,06)^n + \frac{200}{0,06} \leq 0.$$

Tomando logaritmos en la expresión anterior se llega a $n \geq 15,72$. Es decir, en 16 horas desaparecerán todas las bacterias.

Ejercicio 5: (**Modelo hipotecario**) Una persona recibe un préstamo de 120.000 euros con un tipo de interés anual del 4% que se computa mensualmente, y que debe devolver al banco en N años mediante pago de mensualidades de L euros.

(a) Escribe una fórmula que permita calcular la cantidad adeudada al banco tras n meses.

(b) Si pudiera pagar una mensualidad de 500 euros al mes, ¿Cuántos años necesitaría estar pagando para amortizar el préstamo?

(c) Halla el importe mensual L que debería pagar si quiere terminar de pagar el préstamo en 30 años.

R./ (a) El interés es 4% anual, pero como se computa mensualmente, se debe considerar el interés mensual, que es

$$\alpha = \frac{4}{12}\% = \frac{4}{1200} = 0,00\overline{3}.$$

Si llamamos $y(n)$ a la cantidad adeudada al banco tras n meses, la fórmula es.

$$y(n) = 120.000(1,00\overline{3})^n - L\frac{(1,00\overline{3})^n - 1}{0,00\overline{3}}.$$

(b) Hay que hallar el menor n para que $y(n) \leq 0$, con $L = 500$. Es decir

$$y(n) = 120.000(1,00\overline{3})^n - 500\frac{(1,00\overline{3})^n - 1}{0,00\overline{3}} \leq 0.$$

De aqui se obtiene $n \geq 483,64$. Se necesitan, por tanto, 40 años y 4 meses para terminar de pagar el préstamo.

(c) Si se quiere terminar de pagar el préstamo en 30 años, es decir $30 \times 12 = 360$ meses, hay que hallar L para que

$$120.000(1 + \frac{4}{1200})^{360} - L\frac{(1 + \frac{4}{1200})^{360} - 1}{\frac{4}{1200}} = 0.$$

Se tiene

$$L = \frac{\frac{4}{1200}120.000(1 + \frac{4}{1200})^{360}}{(1 + \frac{4}{1200})^{360} - 1} \approx 572,93.$$

Se debe pagar $572,93$ euros al mes para terminar en 30 años.

La ecuación logística discreta.

En un modelo de evolución exponencial, en el que la población en el año $n+1$ aumenta un porcentaje $\alpha\%$ cada año, la población crece indefinidamente. Este modelo puedes ser realista para periodos cortos de tiempo.

Cuando los individuos de una población deben competir por los recursos disponibles para sobrevivir, si los recursos son limitados, cuando el número de individuos es muy grande el crecimiento no podrá ser proporcional al número de individuos del año anterior.

En 1976, Robert May (Sidney (Australia), 1938 - , graduado en Ingeniería Química y en Física) imaginó un ecosistema con **capacidad de alojamiento** K (es decir, K es el número de individuos máximo que pueden subsistir en una población) y propuso que en esta situación, el tamaño $y(n+1)$ de la población en el año $n+1$ debería ser proporcional tanto a $y(n)$ como a $(1-\frac{y(n)}{K})$ (el segundo factor de esta fórmula es la proporción que le falta a $y(n)$ para llegar a su capacidad máxima). Se obtiene así la **ecuación logística discreta**:

$$y(n+1) = R\,y(n)\,(1-\frac{y(n)}{K}).$$

Si $R \leq 1$ en la ecuación logística, el tamaño de la población disminuye y desaparecerá con el paso del tiempo. En el ejercicio siguiente se muestra que $R < 4$.

Ejercicio 6: Considera la función $f(x) = Rx(1-\frac{x}{K}), 0 \leq x \leq K$.

(a) Halla su valor máximo en el intervalo $[0, K]$ y dibuja su gráfica.

(b) Para que el valor máximo hallado en el apartado (a) no supere la capaidad de alojamiento K, prueba que $R < 4$.

R./ (a) Igualando a cero la primera derivada $f'(x) = R - \frac{2R}{K}x = 0$ se deduce que $x = K/2$ es el único punto crítico de la función. Como $f(K/2) = 0,25RK$ y $f(0) = f(K) = 0$, el valor máximo es $0,25RK$.

(b) Como el valor máximo hallado en el apartado (a) no puede superar la capacidad de alojamiento K se tiene $0,25RK < K$. De aquí se deduce que R ha de ser menor que 4.

En la ecuación logística discreta es complicado escribir $y(n)$ en función de la población inicial $y_0 = y(o)$. Pero podemos hacernos una idea del comportamiento de este sistema experimentando con Excel (©).

Ejercicio 7: (a) Realiza un programa en Excel (©) que te permita calcular la evolución durante los 20 primeros años de una población que se rije por la ecuación logística, en función de los parámetros $R =$ factor de crecimiento, $K =$ capacidad de alojamiento e $y_0 =$ tamaño de la población inicial.

(b) Toma $R = 2, K = 1000$ e $y_0 = 100$ y dibuja, también con Excel (©) (usa un gráfico de linea) el resultado de tu programa. ¿Se estabiliza la población? ¿A qué valor?

(c) Toma $K = 1000$ e $y_0 = 100$. Repite el apartado (b) para $i)R = 2,8 \quad ii)R = 3,1 \quad iii)R = 3,4 \quad iv)R = 3,6$. Describe en cada caso lo que observas en la gráficas.

(d) Considera $K = 1000, y_0 = 100$ y $R = 3,7$. Observa que, en este caso, la gráfica de evolución no sigue patrón alguno. Se dice que tiene comportamiento caótico (a pesar de estar descrita con una sencilla ecuación, como es la ecuación logística). Cambia los valores de $y(0)$ a 99 y luego a 101 y observa como estos pequeños cambios en las condiciones iniciales producen gráficas muy diferentes (el efecto del caos).