Sección 2.6: Aproximación de funciones. Polinomio de Taylor.

Aproximación lineal.

La aproximación lineal de una función $y = f(x)$ en un punto $x = a$ es la recta tangente. Como su pendiente es $f'(a)$ la ecuación de la recta tangente es $y - f(a) = f'(a)(x - a)$. Entonces,

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

es la aproximación lineal de $y = f(x)$ en $x = a$.

Ejemplo 1: Calcula la aproximación lineal de $f(x) = \ln x$ en $x = 1$ y úsala para dar una aproximación de $\ln(1,05)$. Calcula el valor obtenido con el valor de tu calculadora.

S./ Como $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ se tiene $f'(1) = 1$. La aproximación lineal es $y = f(1) + 1(x - 1) = x - 1$. Entonces, $\ln(1,05) \approx 1,05 - 1 = 0,05$. Con una calculadora, $\ln(1,05) \approx 0,048790$. La diferencia entre los dos valores es $|0,05 - 0,048790| = 0,001210 < 0,002$.

Ejemplo 2: Halla la aproximación lineal de $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = a$ y usa el resulatado para hallar un valor aproximado de $\sqrt{50}$. Compara el valor obtenido con el de tu calculadora.

R./ El valor aproximado de $\sqrt{50}$ usando una aproximación lineal con $x = 50$ y $a = 49$ es $\dfrac{50}{14} + \dfrac{7}{2} \approx 7,071428$.

Ejemplo 3: Sea $N(t)$ el tamaño de una población de bacterias medido en millones y supongamos que la velocidad de crecimiento per cápita es 2%. Se sabe que en $t = 10$ hay 250 millones de bacterias. Obtener una aproximación lineal para aproximar el número de bacterias en $t = 10,3$.

S./ Tenemos que $\dfrac{1}{N}\dfrac{dN}{dt} = 0,02$ y que $N(10) = 250$. Debemos calcular $N(10,3)$ usando una aproximación lineal $L(t) = N(a) + N'(a)(t - a)$, con $a = 10$ y $t = 10,3$. Por tanto:

$$L(t) = 250 + N'(10)(10,3 - 10) = 250 + N'(10)(0,3).$$

De $\dfrac{1}{N}\dfrac{dN}{dt} = 0,02$ obtenemos, para $t = 10$, que $N'(10) = 0,02 \times N(10) = 0,02 \times 250 = 5$. Entonces,

$$L(10,3) = 250 + 5 \times (0,3) = 251,5.$$

Habrá, aproximadamente, $251,5$ millones de bacterias.

Polinomio de Taylor.

Para una función f que se puede derivar n veces, el polinomio de Taylor de f de grado n centrado en c es:

$$P_{n,c}f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x - c)^3 + \cdots\cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n .$$

Recuerda: $n! = n(n - 1)(n - 2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Ejemplo 4: a) Calcula los polinomios de Taylor de grados 1, 2 y 3 centrados en $c = 0$ de la función $f(x) = e^x$.

b) Usa $P_{3,0}$ para hallar un valor aproximado de $e^{0,1}$ y compáralo con el valor de tu calculadora.

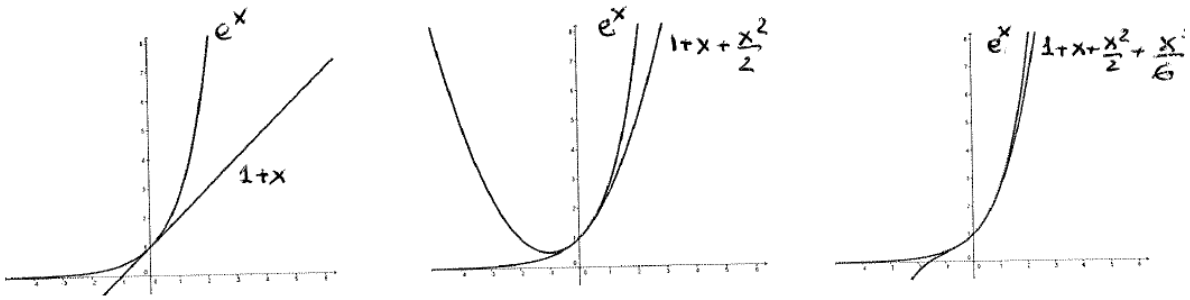
c) Representa con un programa de ordenador la función y los tres polinomios $P_{1,0}, P_{2,0}$ y $P_{3,0}$. ¿Cuál de ellos aproxima mejor a la función?

S./ a) Usando la fórmula dada para el polinomio de Taylor se obtiene

$$P_{1,0}f(x) = 1 + x\,, \qquad P_{2,0}f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}\,, \qquad P_{3,0}f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\,.$$

b) $e^{0,1} = f(0,1) \approx P_{3,0}f(0,1) = 1 + 0,1 + \frac{(0,1)^2}{2} + \frac{(0,1)^3}{6} \approx 1,105166$. Una calculadora produce $e^{0,1} \approx 1,105170$. La diferencia es $|1,105170 - 1,105166| = 0,000004$.

c)



Error de la aproximación con el polinomio de Taylor

El error de aproximar la función $f(x)$ por su polinomio de Taylor $P_{n,c}$ se estima con la fórmula de **Lagrange**:

$$E(x) = |f(x) - P_{n,c}f(x)| = \frac{1}{(n+1)!}|x - c|^{n+1}|f^{(n+1)}(z)|\,,$$

donde z es un punto intermedio entre x y c.

Ejemplo 5: El polinomio de Taylor de grado 3 centrado en $c = 0$ de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ es $P_{3,0}(x) = x - \frac{x^3}{3!}$. Usalo para aproximar $\operatorname{sen}(0,1)$ por $P_{3,0}(0,1)$ y determina una acotación del error con la fórmula de Lagrange.

S./

$$\operatorname{sen}(0,1) \approx P_{3,0}(0,1) = 0,1 - \frac{(0,1)^3}{6} \approx 0,099833\,.$$

El error de esta aproximacion está acotado por

$$E(x) = \frac{1}{4!}|x|^4|\operatorname{sen} z| \leq \frac{1}{4!}|x|^4\,.$$

Poniendo $x = 0,1$ se tiene $E(x) \leq \dfrac{1}{4!}(0,1)^4 \approx 0,000004\,.$