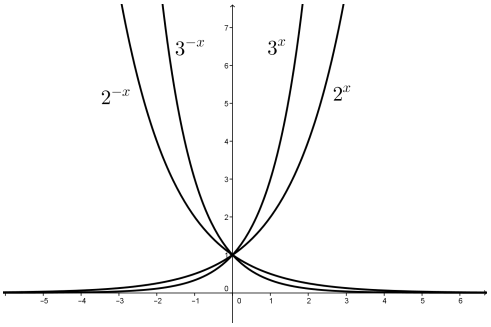
Sección 2.3: Funciones exponencial y logarítmica.

Funciones exponenciales: Una función exponencial es de la forma $y = f(x) = ka^{rx}$, donde a es un número real positivo ($a \neq 1$), k y r son constantes y $k > 0$. Su dominio es $(-\infty, \infty)$ y su recorrido $(0, \infty)$. Una base muy usada para la función exponencial es el número $e \approx 2'718281.....$

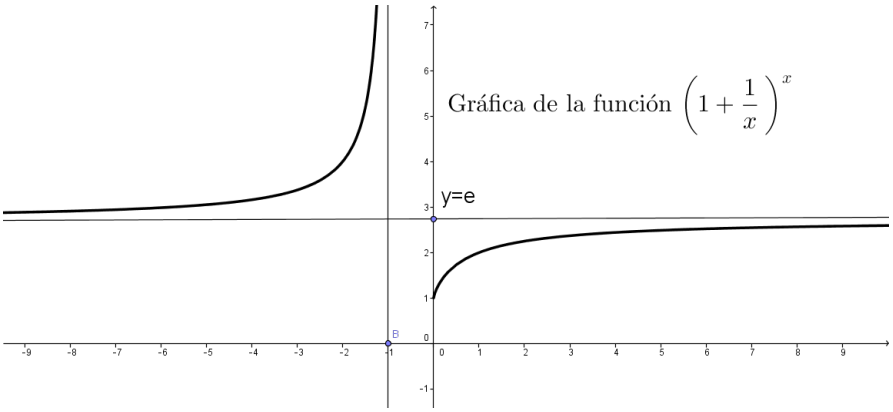


Propiedades de las potencias:

$$a^x a^y = a^{x+y}\ , \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}\ , \qquad \frac{1}{a^x} = a^{-x}\ , \qquad (a^x)^y = a^{xy}\ .$$

Un límite especial: el número $e = 2,718281828....$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$



Ejemplo:

$$\lim_{x\to\infty} 6\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{2x} = 6\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{5x}\right]^{2/5} = 6\left[\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{2/5} = 6e^{2/5}.$$

Los isótopos radioactivos se usan para determinar la edad de los fósiles. Esta técnica fue descubierta a principios del siglo XX. Se basa en que la cantidad de C^{14} presente en los seres vivos es constante debido a la absorción y transformación de CO_2. Cuando un ser vivo muere deja de absorver CO_2 y la cantidad de C^{14} disminuye.

Sea W_0 la cantidad de C^{14} en el instante inicial y $W(t)$ la cantidad en el instante t. La **ley de desintegración radioactiva** establece que

$$W(t) = W_0 e^{-\lambda t}\ ,\ t \geq 0,$$

donde λ es la **velocidad de desintegración** (característica del C^{14}).

La velocidad de desintegración de un material radioactivo (por ejemplo el C^{14}) se puede obtener conociendo la vida media T_m del material, que es el tiempo que tarda la cantidad de material radioactivo en reducirse a la mitad.

Ejercicio:

Se conoce que la vida media del C^{14} es 5730 años.

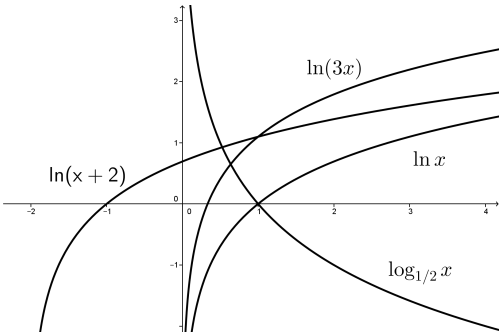
a) ¿Que porcentaje de C^{14} quedará en un fósil actualmene si falleció hace 15.000 años?

b) Si las muestras de fósiles encontradas en una excavación arqueológica contienen aproximadamente un 18% de C^{14}, ¿Cuándo murió el elemento que se ha fosilizado?

Logaritmo en base a: Sean $a, x > 0$ números reales, con $a \neq 1$. El logaritmo en base a de x es un número real y que satisface

$$\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y.$$

Si $a = e$ escribimos $\log_e x = \ln x$ (logaritmo natural o neperiano) y si $a = 10$ se suele escribir $\log_{10} x = \log x$.



Las **funciones logarítmicas** son de la forma $y = f(x) = A + B \log_a x$, con $a > 0, a \neq 1$. Su dominio de definición es $(0, \infty)$ y su recorrido $(-\infty, \infty)$.

Propiedades de los logaritmos:

$$\mathbf{1})\ a^{\log_a x} = x \quad , \qquad \mathbf{2})\ \log_a a^x = x \ ,$$

$$\mathbf{3})\ \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \quad , \qquad \mathbf{4})\ \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \ ,$$

$$\mathbf{5})\ \log_a x^y = y \log_a x \quad , \qquad \mathbf{6})\ \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \ .$$

Ejercicio: (Intensidad del sonido)

La relación entre el número de decibelios β y la intensidad de un sonido I en $wats/cm^2$ es

$$\beta = 10 \log_{10}(I/10^{-16}).$$

Usa las propiedades de los logaritmos para simplificar esta fórmula y calcula el número de decibelios de un sonido con intensidad $10^{-10} wats/cm^2$.