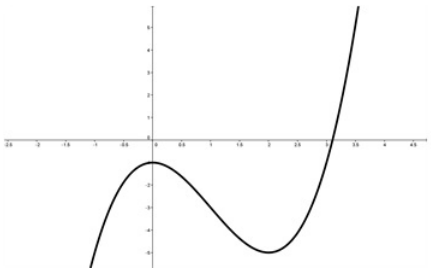
Sección 1.2: Funciones elementales. Representación gráfica.

Definición 1. Una función $f : A \to B$ es una ley o regla que asocia a cada elemento x de un conjunto A un **solo** elemento y del conjunto B. Escribimos $y = f(x)$.

- x se llama variable independiente.
- y se llama variable dependiente.
- A es el dominio de definición de f.
- El conjunto $f(B)$ de los valores que toma y es llama rango o recorrido de f.

Si $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida entre números reales su **gráfica** es el conjunto $(x, f(x))$ de puntos del plano cuando x recorre el conjunto A.



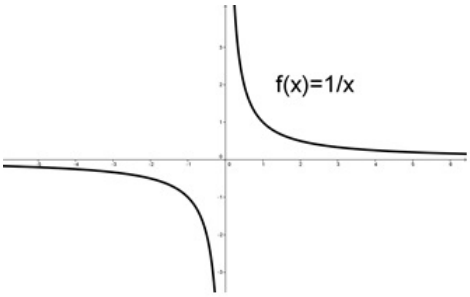
Funciones lineales: $y = mx + b$ donde m es la pendiente de la recta y b la ordenada en el origen.

Funciones polinómicas: Una función polinómica es una función de la forma

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

donde n es un número entero no negativo, $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales ($a_n \neq 0$). El mayor dominio posible es $\mathbb{R}$.

Funciones racionales: Una función racional es el cociente de dos funciones polinómicas $p(x)$ y $q(x)$, es decir, $f(x) = p(x)/q(x)$. Como no se puede dividir entre 0, para hallar el dominio de $f(x)$ hay que excluir los valores en los que $q(x) = 0$. Un ejemplo de función racional es $f(x) = 1/x\,(x \neq 0)$ cuya representación gráfica, que se muestra a la derecha, es una hiperbola equilátera.



Tipos básicos de transformaciones de $y = f(x)$ ($c > 0$).

$y = f(x - c)$: traslación horizontal a la derecha c unidades.
$y = f(x + c)$: traslación horizontal a la izquierda c unidades.
$y = f(x) + c$: traslación vertical hacia arriba c unidades.
$y = f(x) - c$: traslación vertical hacia abajo c unidades.
$y = -f(x)$: reflexión respecto al eje OX.
$y = f(-x)$: reflexión respecto al eje OY.
$y = -f(-x)$: reflexión respecto al origen.

Una función es **par** si se cumple $f(-x) = f(x)$ para todo x. La gráfica de una función par es simétrica respecto al eje OX.

Una función es **impar** si se cumple $f(-x) = -f(x)$ para todo x. La gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen de coordenadas.

Composición de funciones: Dadas dos funciones f y g con $Rec(g) \subset Dom(f)$, la función compuesta de f y g se define como $f \circ g(x) = f(g(x)$.

Ejemplo: Si $f(x) = 3x - 1$ y $g(x) = \frac{2}{x-3}$, se tiene

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = 3g(x) - 1 = 3\frac{2}{x-3} - 1 = \frac{6}{x-3} - 1 = \frac{9-x}{x-3}$$

y su dominio de definición es $\mathbb{R} \setminus \{3\}$. Por otro lado

$$g \circ f(x) = \frac{2}{f(x)-3} = \frac{2}{(3x-1)-3} = \frac{2}{3x-4}$$

y su dominio de definición es $\mathbb{R} \setminus \{4/3\}$.

Función inversa: La inversa de una función f es otra función f^{-1} que satisface
a) $f(f^{-1})(x) = x$ para todo x en el Dom (f^{-1}) y b) $f^{-1}(f(x)) = x$ para todo x en el Dom (f)

La gráfica de un función f y la de su función inversa f^{-1} son simétricas respecto a la recta $x = y$. No todas la funciones tienen inversa: para que una función tenga inversa en un intervalo debe satisfacer el test de la recta horizontal (cualquier recta horizontal corta a la gráfica de la función f como mucho en un solo punto). Se dice entonces que f es **inyectiva** en el intervalo.

Se tiene: Dom (f^{-1}) = Rec (f) y Rec (f^{-1}) = Dom (f).

Ejemplo: La función $f(x) = \frac{x^2+3}{2}$ es inyectiva en el intervalo $[0, \infty)$ y su recorrido es $[3/2, \infty)$. Su función inversa es $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x$. Por tanto,

$$\frac{y^2+3}{2} = x \Rightarrow y^2 = 2x - 3 \Rightarrow y = \sqrt{2x-3}.$$

Se ha elegido la raiz positiva porque Rec(f^{-1}) = Dom(f) = $[0, \infty)$ es de números positivos. Además Dom(f^{-1}) = Rec (f) = $[3/2, \infty)$.