ONDÍCULAS Y TRATAMIENTO DE SEÑALES —— CURSO 2014-15

TEMAS PARA EL EXAMEN

1. El teorema de muestreo de Whittaker-Shannon.

a) Enuncia y demuestra el teorema de muestreo de Whittaker-Shannon

b) Describe el teorema de muestreo de Whittaker-Shannon en el lado de las frecuencias e interpreta el resultado geométricamente.

c) Describe el teorema de muestreo en dos dimensiones.

2. Bases ortonormales discretas.

a) (DC-I) Demuestra que la colección de vectores

$$\left\{ \lambda_k \sqrt{\frac{2}{N}} \left(cos \frac{k\pi}{n} (n + \frac{1}{2}) \right)_{n=0}^{N-1} \right\}_{k=0}^{N-1}$$

con $\lambda_0 = 1/\sqrt{2}$ y $\lambda_k = 1$ si $1 \leq k \leq N-1$ es una base ortonormal de $\mathbb{C}^N$.

b) Indica el procedimiento para obtener DC-IV.

3. Análisis Multirresolución en $L^2(\mathbb{R})$.

a) Define Análisis Multirresolución en $L^2(\mathbb{R})$ y describe dos ejemplos sencillos.

b) Demuestra que si $g \in L^2(\mathbb{R})$, $\{g(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es un sistema ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ si y solo si $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\mathcal{F}(g)(\xi + 2k\pi)|^2 = 1$ casi todo $\xi \in \mathbb{R}$.

c) Define el filtro $h(\xi)$ asociado a un AMR y demuestra que $|h(\xi)|^2 + |h(\xi + \pi)|^2 = 1$ casi todo $\xi \in \mathbb{R}$.

4. Diseño de ondículas en $L^2(\mathbb{R})$.

a) Describe como se obtiene un filtro h a partir de un AMR con función de escala φ y demuestra que $|h(\xi)|^2 + |h(\xi + 1/2)|^2 = 1$ casi todo $\xi \in \mathbb{R}$.

b) Describe la receta de S. Mallat para construir ondículas ortonormales a partir de una AMR con función de escala φ.

c) Construye las ondículas de Haar y de Shannon a partir de sus corrrespondientes AMR.

5. Descomposición y reconstrucción con óndiculas ortonormales.

a) Sean $c_j(k) =< f, \varphi_{j,k} >$ y $d_j(k) =< f, \psi_{j,k} >$, $f \in L^2(\mathbb{R}), j,k \in \mathbb{Z}$. Demuestra las fórmulas de descomposición para la tendencia y los detalles

$$c_{j-1}(p) = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{h(k-2p)}\, c_j(k) \quad p \in \mathbb{Z}\,,$$

y

$$d_{j-1}(p) = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{g(k-2p)}\, c_j(k) \quad p \in \mathbb{Z}\,.$$

b) Prueba la fórmula de reconstrucción

$$c_j(p) = \sqrt{2}\check{c}_{j-1,k} * h(p) + \sqrt{2}\check{d}_{j-1,k} * g(p)\,.$$

6. Obtención de ondículas a partir de filtros

a) Describe como obtener una función de escala φ a partir de un filtro h.

b) Demuestra que, bajo algunas condiciones sobre el filtro h, que debes indicar, la función φ definida en el apartado a) pertence a $L^2(\mathbb{R})$ y su norma es menor o igual a 1.

c) Describe como obtener las ondículas de Lemarié-Meyer.

7. El código de Huffman.

a) Describe como se codifican los símbolos de un fuente de información $X = \{X_1, X_2, \ldots, X_L\}$ de acuerdo con sus probabilidades $\{p_1, p_2, \ldots, p_L\}$ según el código de Huffman.

b) Demuestra que el código de Huffman $\mathcal{C}$ es óptimo, en el sentido de que minimiza $\mathcal{A}_{\mathcal{C}}(X)$.

c) Construye un código de Huffman de los símobolos $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7\}$ con probabilidades $p_1 = 0,01, p_2 = 0,05, p_3 = 0,06, p_4 = 0,08, p_5 = 0,15, p_6 = 0,15, p_7 = 0,5$.

8. Ondículas biortogonales.

a) Escribe y demuestra las condiciones necesarias y suficientes para que un banco de filtros h, g, $\tilde{h}$ y $\tilde{g}$ produzcan una reconstrucción perfecta de una señal discreta.

b) Define los conceptos de ondículas biortogonales y AMR biortogonales con bases de Riesz.

c) Describe como pueden obtenerse ondículas biortogonales a partir de un par de AMR biortogonales.