EXAMEN PARCIAL 1 12/Enero/2015

1.a) Las raíces cúbicas de $z = i = 1e^{\frac{\pi}{2}i}$ son $\omega_k = 1\, e^{\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)i}$ para $k=0,1,2$.

$k=0$: $\omega_0 = e^{\pi/6\, i} = \cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$

$k=1$: $\omega_1 = e^{\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)i} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$

$k=2$: $\omega_2 = e^{\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)i} = -i$

b) Derivando implícitamente se tiene $2\operatorname{sen} x \cos x - y' \operatorname{sen} y = 0$.

Para $x = \frac{\pi}{4}$, $y = \frac{\pi}{3}$ se tiene $2(\operatorname{sen}\frac{\pi}{4})(\cos\frac{\pi}{4}) - y' \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = 0 \iff$

$2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - y'\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{3}/2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Recta tangente : $y - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

c) $f(x) = \sqrt{1+e^x}$ tiene como $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$. El recorrido de e^x es $(0,\infty)$, por lo que el recorrido de $1+e^x$ es $(1,\infty)$. Tomando la raíz cuadrada se tiene $\mathrm{Rec}(f) = (1,\infty)$

Para hallar la función inversa escribimos $x = \sqrt{1+e^y}$ y despejamos y : $x^2 = 1+e^y \iff e^y = x^2-1 \Rightarrow y = \ln(x^2-1)$

$\mathrm{Dom}(f^{-1}) = (1,\infty)$, $\mathrm{Rec}(f^{-1}) = \mathbb{R}$

La función inversa es $f^{-1}(x) = \ln(x^2-1)$ cuando $x > 1$.

——————— x ———————

2. a) $f(x) = \cos x - \frac{1}{2}\cos(2x)$

La primera derivada es: $f'(x) = -\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x = -\operatorname{sen} x + 2\operatorname{sen} x \cos x$
$= \operatorname{sen} x\,[-1 + 2\cos x]$. Igualando a cero se deduce

$$\operatorname{sen} x = 0 \iff x = 0,\ x = \pi,\ x = 2\pi$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{3},\ x = \frac{5\pi}{3}$$

Estudio del signo de $f'(x)$:

0		$\frac{\pi}{3}$		π		$\frac{5\pi}{3}$		2π
	$+$		$-$		$+$		$-$	
	crece		decrece		crece		decrece	

O bien

	0 – $\pi/3$	$\pi/3$ – π	π – $\frac{5\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$ – 2π
$\operatorname{sen} x$	$+$	$+$	$-$	$-$
$2\cos x - 1$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$

b) Calculemos $f(0)$, $f(\frac{\pi}{3})$, $f(\pi)$, $f(\frac{5\pi}{3})$ y $f(2\pi)$ y elegimos los valores máximo y mínimo

$$f(0) = \cos 0 - \frac{1}{2}\cos 0 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$f(\tfrac{\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$f(\pi) = \cos\pi - \frac{1}{2}\cos 2\pi = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$f(\tfrac{5\pi}{3}) = \cos\frac{5\pi}{3} - \frac{1}{2}\cos\frac{10\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{4\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

$$f(2\pi) = \cos 2\pi - \frac{1}{2}\cos 4\pi = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Valor máximo} = 3/4 \\ \text{Valor mínimo} = -3/2\end{array}}$$

3. a) $x^2+x-2=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}$ $<^{1}_{-2}$. Luego tenemos

$x^2+x-2=(x-1)(x+2)$. Tenemos que hacer la descomposición en fracciones simples:

$$\frac{3}{x^2+x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}=\frac{Ax+2A+Bx-B}{(x-1)(x+2)}=\frac{(A+B)x+(2A-B)}{x^2+x-2}$$

Para $x=1$, $3=A+2A \Rightarrow A=1$

Para $x=-2$, $3=-2B-B \Rightarrow B=-1$

$$\int_2^\infty \frac{3}{x^2+x-2}dx=\int_{+2}^\infty \frac{1}{x-1}dx+\int_{+2}^\infty\frac{-1}{x+2}dx=\left[\ln|x-1|\right]_2^\infty-\left[\ln|x+2|\right]_2^\infty$$

$$=\left[\ln\frac{x-1}{x+2}\right]_2^\infty=\lim_{x\to\infty}\left(\ln\frac{x-1}{x+2}\right)-\ln\frac{1}{4}=\ln 1-\ln\frac{1}{4}=\ln 4$$

b) Se integra por partes.

$u=(x-\pi)$, $du=dx$

$dv=\operatorname{sen}x\,dx$, $v=-\cos x$

$$\int_0^\pi (x-\pi)\operatorname{sen}x\,dx=\left[-(x-\pi)\cos x\right]_0^\pi+\int_0^\pi \cos x\,dx=$$

$$=-\pi\cos 0+\left[\operatorname{sen}x\right]_0^\pi=-\pi$$

c) Podría hacerse derivando. Pero como sabemos que

$P_{c=0}(\operatorname{sen}y)=y-\frac{1}{3!}y^3+\frac{1}{5!}y^5+\dots$ se tiene

$$P_{c=0}(f(x))=P_{c=0}((1+x)\operatorname{sen}(2x))=(1+x)\left[2x-\frac{1}{3!}(2x)^3+\frac{1}{5!}(2x)^5+\dots\right]$$

$$=2x-\frac{2^3}{3!}x^3+2x^2-\frac{2^3}{3!}x^4+\dots$$

El polinomio de orden 4 es:

$$2x+2x^2-\frac{8}{6}x^3-\frac{8}{6}x^4$$

4. a) Como $y' - xy = x$ es una ecuación lineal de primer orden, hallemos un factor integrante $\mu(x) = e^{\int -x\,dx} = e^{-x^2/2}$. Entonces,

$$e^{-x^2/2} y' - xy e^{-x^2/2} = x e^{-x^2/2} \iff (y e^{-x^2/2})' = x e^{-x^2/2}.$$

Luego,

$$y e^{-x^2/2} = \int x e^{-x^2/2} dx = -e^{-x^2/2} + C$$

Por tanto,

$$y = -1 + C e^{x^2/2}$$

b) Es una ecuación lineal de segundo orden y homogenea. Su ecuación característica es $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \iff (\lambda-3)(\lambda+2) = 0$

La solución general es $y(x) = A e^{3x} + B e^{-2x}$. Hallamos A y B con las condiciones iniciales:

$$1 = y(0) \Rightarrow 1 = A + B$$

$$y'(x) = 3A e^{3x} - 2B e^{-2x} \Rightarrow 3 = y'(0) = 3A - 2B$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A + B = 1 \\ 3A - 2B = 3 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} 2A + 2B = 2 \\ 3A - 2B = 3 \end{array} \right\} (+) \quad 5A = 5 \Rightarrow A = 1 \quad \boxed{B = 0}$$

La solución es

$$y(x) = e^{3x}$$