Ecuaciones diferenciales

Modelos matemáticos y ecuaciones diferenciales

Una *ecuación diferencial* es una relación que involucra alguna o algunas de las derivadas de una función. El mayor orden de derivadas que aparece se suele llamar *orden* de la ecuación diferencial. La función queda en muchos casos totalmente determinada por unos valores iniciales. Como regla general, si una ecuación diferencial es de orden k, entonces se debe especificar el valor de la función y sus derivadas en un punto hasta orden $k-1$. Muchas veces se toma $x = 0$ como este punto pero no hay ninguna razón especial para ello más que respetar la idea de "valor inicial".

Habitualmente se dice que la familia de soluciones cuando no se imponen condiciones en valores concretos, es la *solución general* de la ecuación diferencial.

Ejemplo. Es fácil ver que $y = e^x$ es una solución de la ecuación diferencial $y' = y$. También lo es $y = 0$, y pensando un poco más no es difícil percatarse de que $y = Ce^x$ satisface la ecuación para cualquier constante C. De hecho, ésta es la solución general. Si especificamos el valor de $y = y(x)$ en un punto x, entonces la solución queda totalmente determinada. Así, por ejemplo, la solución de $y' = y$ con $y(0) = 2$ es $y = 2e^x$, que proviene de que al sustituir en la solución general $x = 0$, $y = 2$ se sigue $2 = Ce^0$.

En contra de lo que ocurre en el ejemplo anterior, la variable x puede aparecer en una ecuación diferencial. Por ejemplo $y' = xy$ es una variante de la ecuación anterior en el que es un poco más difícil conjeturar la solución general. Esto ejemplos no deben dar la idea de que siempre podamos encontrar soluciones por tanteos. Nótese que $y' = f(x)$ tiene como solución $\int f(x)\,dx$, entonces resolver ecuaciones diferenciales es al menos tan difícil como integrar. Incluso conociendo muchos métodos, hay muy pocas ecuaciones diferenciales que se puedan resolver explícitamente. Al igual que en el caso de las integrales, los ejemplos tienen que estar preparados.

La importancia de las ecuaciones diferenciales radica en que participan en muchos modelos matemáticos. Por ejemplo, si decimos que el aumento de una población es proporcional al número de individuos (porque se reproducen), entonces el modelo natural es $p' = \alpha p$ donde $p = p(t)$ es el número de individuos en función del tiempo y α es una constante. Éste es un buen modelo para tiempos pequeños en poblaciones reducidas que se reproducen rápidamente, como colonias de bacterias, pero cuando empiezan a competir por el alimento o contamos otros factores, la ecuación diferencial se complica.

En Física, la aceleración es una derivada segunda y la velocidad una derivada primera, por tanto son muy comunes las ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden para resolver problemas de mecánica.

A pesar de que no las estudiaremos en este curso, viene al caso mencionar que muchas de las ecuaciones diferenciales de los modelos matemáticos son en varias variables y, en ese caso, se llaman *ecuaciones en derivadas parciales*. Por ejemplo, en los cursos de Física aparecen diferentes ecuaciones que regulan el *electromagnetismo* y que explican fenómenos tan importantes para nuestra vida cotidiana como las ondas empleadas en telecomunicaciones. En ausencia de cargas y corrientes, estas ecuaciones son las *ecuaciones de Maxwell*:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0, \qquad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \qquad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot} \vec{B} = c^{-2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Sólo se escriben aquí como curiosidad y para ver la relación con la Física. Nosotros nos ocuparemos únicamente de ecuaciones diferenciales en las que se busca una función de una variable $y = y(x)$.

Variables separables

Una ecuación diferencial de primer orden se dice que es de *variables separables* si puede escribirse en la forma

$$F(y)y' = G(x). \tag{1}$$

Un caso particular son las ecuaciones del tipo $y' = H(y)$ pues equivale a $y'/H(y) = 1$. La manera de resolverla es integrar en ambos miembros. En el primero, como siempre se tiene y', por la regla de la cadena basta integrar F. Para hacer hincapié en ello, empleando $y' = dy/dx$, a veces se escribe (1) como $F(y)\,dy = G(x)\,dx$ y la solución es $\int F(y)\,dy = \int G(x)\,dx$. Es importante recordar que al integrar hay constantes de integración, que basta poner en uno de los miembros (porque siempre una se pueden pasar a restando).

Ejemplo. Consideremos la ecuación $y' = y$ del ejemplo anterior, para resolverla separando variables, debemos escribir

$$y' = y \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y}y' = 1 \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = x + c \quad \Rightarrow \quad y = \pm e^c e^x,$$

donde c es una constante arbitraria, y por tanto $\pm e^c$ también lo será. Si la llamamos K, la solución general es $y = Ke^x$.

Ejemplo. Digamos que queremos resolver la ecuación diferencial $y' = e^{x+y}$ con $y(0) = 0$. Separando las variables e integrando

$$y' = e^{x+y} \quad \Rightarrow \quad e^{-y}y' = e^x \quad \Rightarrow \quad -e^{-y} = e^x + c \quad \Rightarrow \quad y = -\ln(-c - e^x).$$

Ésta es la solución general. Para obtener la solución con $y(0) = 0$, despejamos c en la igualdad $0 = -\ln(-c - e^0)$. Como $\ln 1 = 0$ y $e^0 = 1$, se obtiene $c = -2$. Entonces la función buscada es $y = -\ln(2 - e^x)$.

Nótese que a la larga, cuando x crece, la solución del ejemplo anterior dejará de existir, de hecho hay una asíntota en $x = \ln 2$. A veces se dice que la solución *explota*. Este fenómeno es muy habitual al resolver ecuaciones diferenciales.

Ejemplo. Resolvamos ahora la ecuación diferencial $y' = x^2y^2 + x^2$ con $y(0) = 1$. Después de sacar x^2 factor común,

$$y' = x^2(y^2+1) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y^2+1}y' = x^2 \quad \Rightarrow \quad \arctan y = \frac{x^3}{3} + c \quad \Rightarrow \quad y = \tan\Big(\frac{x^3}{3} + c\Big).$$

Para que se satisfaga $y(0) = 1$ basta elegir $c = \pi/4$ (o en general $k\pi + \pi/4$. Entonces la solución buscada es $y = \tan\big(x^3/3 + \pi/4\big)$.

Ya se ha mencionado que las ecuaciones diferenciales son fundamentales en los modelos matemáticos, por eso a veces los problemas no dan explícitamente la ecuación sino el modelo que permite deducirla.

Ejemplo. Digamos que $p = p(t)$ es el número de bacterias en un cultivo en función del tiempo (en horas). Sabemos p' y p son proporcionales y que la población inicial $p_0 = p(0)$ se duplica en 24 horas, y nos gustaría saber cuánto va a tardar en triplicarse. Para ello escribimos la ecuación diferencial $p' = Cp$. La constante C no nos la dan, pero separando las variables se deduce que la solución general en función de C es $p = Ke^{Ct}$ con K una constante arbitraria. Ahora añadimos las hipótesis del problema $p(0) = p_0$ y $p(24) = 2p_0$:

$$p_0 = Ke^{C\cdot 0}, \quad 2p_0 = Ke^{C\cdot 24} \quad \Rightarrow \quad K = p_0, \quad C = \frac{\ln 2}{24}.$$

Una vez que tenemos los valores de K y C, debemos hallar el tiempo t tal que $Ke^{Ct} = 3p_0$ que, despejando, es $t = 24(\ln 3)/(\ln 2)$, unas 38 horas.

Lineales con coeficientes constantes

Separando variables se pueden resolver algunas ecuaciones diferenciales de aspecto complicado pero las ecuaciones que se escriben en la forma (1) constituyen un conjunto reducido y además están restringidas a orden 1. Con lo estudiado anteriormente no seríamos capaces de resolver ni siquiera ecuaciones tan simples como $y'' + y$ que son muy comunes en Física.

Ahora vamos a estudiar un conjunto de ecuaciones diferenciales que es todavía más restrictivo pero que tiene la ventaja de que engloba a diversas ecuaciones que aparecen naturalmente en aplicaciones básicas.

Decimos que una ecuación diferencial es *lineal de orden n con coeficientes constantes* si es de la forma

$$(2) \qquad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + a_1y' + a_0y = F(x)$$

donde $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ son números reales fijados.

Cuando F es la función idénticamente nula, se dice que la ecuación es *homogénea*. Vamos a ocuparnos en primer lugar de ellas.

A cada ecuación homogénea se le asigna la ecuación polinómica definida por sus coeficientes. Esto es, a (2) le corresponde

$$(3) \qquad \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

A cada raíz real simple λ_j de esta ecuación se le hace corresponder la solución $e^{\lambda_j x}$, y a cada par de raíces simples complejas conjugadas $a_j \pm b_j i$ se le hace corresponder el par de soluciones $e^{a_j x}\cos(b_j x)$ y $e^{a_j x}\operatorname{sen}(b_j x)$. La solución general de la ecuación diferencial homogénea es una combinación lineal de estas soluciones con coeficientes dados por constantes arbitrarias.

A veces se llama a (3) *ecuación característica*, como en el caso de la diagonalización de matrices, de hecho hay una relación entre ambos temas [Str80] y la estructura de espacio vectorial que tienen las soluciones permite utilizar técnicas de álgebra lineal, aunque no lo haremos aquí más allá de resolver algún sistema lineal.

Ejemplo. Ya sabíamos resolver $y' = y$ porque era de variables separables pero si la escribimos como $y' - y = 0$ es una ecuación homogénea que tiene como ecuación característica $\lambda - 1 = 0$. La solución correspondiente a la única raíz $\lambda = 1$ es e^x y por tanto la solución general $y = Ke^x$, como ya habíamos obtenido.

Ejemplo. Ya hemos indicado que $y'' + y = 0$ es una ecuación común en Física, pues corresponde al *movimiento armónico simple*. La ecuación (3) es $\lambda^2 + 1 = 0$ que tiene como raíces $\lambda = \pm i$. Según lo dicho anteriormente, corresponden a las soluciones $e^{0\cdot x}\cos x$ y $e^{0\cdot x}\operatorname{sen} x$. Por tanto la solución general es $y = K_1\cos x + K_2\operatorname{sen} x$ con K_1 y K_2 constantes arbitrarias. Al aproximar el *péndulo simple* para pequeñas oscilaciones, aparecen de forma natural las condiciones $y(0) = l_0$, $y'(0) = 0$ (donde l_0 se relaciona con la *elongación* y la segunda condición implica que se parte del reposo). Entonces

$$K_1\cdot 1 + K_2\cdot 0 = l_0, \qquad -K_1\cdot 0 + K_2\cdot 1 = 0,$$

lo que conduce a $y = l_0\cos x$

Ejemplo. Vamos a resolver la ecuación diferencial

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 2. \end{cases}$$

La ecuación (3) es $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ que tiene como raíces $\lambda = 1 \pm i$. Las soluciones que corresponden a estas raíces son $e^x\cos x$ y $e^x\operatorname{sen} x$, por tanto la solución general es $y = K_1e^x\cos x + K_2e^x\operatorname{sen} x$ que cumple $y' = K_1(e^x\cos x - e^x\operatorname{sen} x) + K_2(e^x\operatorname{sen} x + e^x\cos x)$. Las condiciones $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ implican

$$K_1\cdot 1 + K_2\cdot 0 = 1, \qquad K_1\cdot 1 + K_2\cdot 1 = 2,$$

que determina la solución $y = e^x\cos x + e^x\operatorname{sen} x$.

En los ejemplos anteriores era importante que las raíces fueran simples para asegurar que teníamos tantas funciones solución como el orden (el mismo problema que aparece con los autovalores en la diagonalización de matrices). Si hubiera raíces reales o complejas múltiples de multiplicidad m (esto es, repetidas m veces), debemos considerar

$$x^k e^{\lambda_j x} \qquad \text{o} \qquad x^k e^{a_j x}\cos(b_j x), \quad x^k e^{a_j x}\operatorname{sen}(b_j x) \quad \text{con } k = 0, 1, \dots m-1,$$

dependiendo de que la raíz sea real o compleja. Es decir, para una raíz doble multiplicamos por 1 y por x, para una triple por 1, x y x^2 y así sucesivamente.

Ejemplo. Hallemos la solución de

$$\begin{cases} y''' - 3y'' + 3y' - y = 0 \\ y(1) = 3, \quad y'(1) = 6, \quad y''(1) = 11. \end{cases}$$

La ecuación característica es $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3 = 0$. Entonces $\lambda = 1$ es una raíz triple y las tres soluciones asociadas a ella son e^x, xe^x y x^2e^x. La solución general adquiere la forma $y = K_1e^x + K_2xe^x + K_3x^2e^x$ y al imponer las condiciones iniciales $y(1) = 3$, $y'(1) = 6$, $y''(1) = 11$, se llega a un sistema lineal

$$\begin{cases} y = \big(K_1 + K_2x + K_3x^2\big)e^x \\ y' = \big(K_1 + K_2 + (K_2 + 2K_3)x + K_3x^2\big)e^x \\ y'' = \big(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + (K_2 + 4K_3)x + K_3x^2\big)e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_1 + K_2 + K_3 = 3e^{-1} \\ K_1 + 2K_2 + 3K_3 = 6e^{-1} \\ K_1 + 3K_2 + 7K_3 = 11e^{-1} \end{cases}$$

Al resolverlo se sigue $K_1 = K_2 = K_3 = e^{-1}$ y por consiguiente la solución buscada viene dada por $y = \big(1 + x + x^2\big)e^{x-1}$.

Finalmente nos ocuparemos de las ecuaciones lineales con coeficientes constantes no homogéneas, es decir, aquellas de la forma (2) que no están igualadas a cero. Lo primero que hay que hacer es resolver la homogénea (suponer $F = 0$) y después sumar al resultado una *solución particular* de la ecuación no homogénea (2). Esto significa cualquier solución que veamos a simple vista o que podamos ajustar. En principio no parece algo demasiado sistemático pero en breve veremos algunas directrices para proceder en casos simples.

Ejemplo. Digamos que buscamos una solución de $y'' - 2y' + 2y = 2$. La ecuación homogénea es $y'' - 2y' + 2y = 0$, que ya habíamos resuelto antes como combinación lineal de las funciones $e^x \cos x$ y $e^x \operatorname{sen} x$. Por otro lado, está claro que $y = 1$ verifica la ecuación no homogénea original, entonces la solución general es

$$y = 1 + K_1e^x \cos x + K_2e^x \operatorname{sen} x.$$

Si en el ejemplo anterior se el segundo miembro hubiera sido 1 en lugar de 2 una solución particular sería $y = 1/2$ y podríamos ajustar cualquier número. Por otro lado, para obtener un polinomio de grado 1, por ejemplo $x + 1$, podríamos probar con algo de la forma $ax + b$ y ajustar coeficientes. Concretamente, al tomar $y = ax + b$ el primer miembro resulta ser $2ax + 2b - 2a$ que igualado a $x + 1$ implica $a = 1/2$, $b = 1$ y $y = x/2 + 1$ es la solución particular buscada.

Este procedimiento de tratar de ajustar coeficientes, funciona siempre que tengamos polinomios, exponenciales, senos y cosenos y productos de ellos. En una tabla no muy exhaustiva:

$F(x)$	y_p
polinomio	polinomio
e^{Cx}	Ae^{Cx}
polinomio$\cdot e^{Cx}$	$P(x)e^{Cx}$
$\cos(Cx)$	$A\cos(Cx)+B\,\mathrm{sen}(Cx)$
$\mathrm{sen}(Cx)$	$A\cos(Cx)+B\,\mathrm{sen}(Cx)$
polinomio$\cdot\cos(Cx)$	$P_1(x)\cos(Cx)+P_2(x)\,\mathrm{sen}(Cx)$
polinomio$\cdot\,\mathrm{sen}(Cx)$	$P_1(x)\cos(Cx)+P_2(x)\,\mathrm{sen}(Cx)$

Excepto en los casos en que hay *resonancia*, de la cual hablaremos después, los polinomios genéricos de prueba son del mismo grado que los que aparecen en la función F.

Ejemplo. Queremos resolver la ecuación diferencial

$$\begin{cases} y''-3y'+2y=2x^2-4x-1 \\ y(0)=0, \quad y'(0)=2. \end{cases}$$

A la ecuación homogénea $y''-3y'+2y=0$ le corresponde la ecuación $\lambda^2-3\lambda+2=0$ con raíces 1 y 2, por tanto su solución general es $K_1e^x+K_2e^{2x}$. Según las indicaciones anteriores, deberíamos buscar una solución particular entre los polinomios de grado 2. Es decir, tomamos como posible solución ax^2+bx+c que al sustituir en la ecuación da

$$2ax^2+(2b-6a)x+(2c-3b+2a)=2x^2-4x-1.$$

Al igualar los coeficientes y resolver el sistema, se sigue $a=1$, $b=1$, $c=0$, lo que significa que x^2+x es una solución particular, y la solución general de la ecuación original es

$$y=x^2+x+K_1e^x+K_2e^{2x}.$$

Las condiciones iniciales $y(0)=0$, $y'(0)=2$ implican $K_1+K_2=0$ y $1+K_1+2K_2=2$ que da finalmente, $y=x^2+x-e^x+e^{2x}$.

Ejemplo. Vamos a hallar ahora la solución general de la ecuación diferencial

$$y'+2y=5\,\mathrm{sen}\,x.$$

La homogénea es fácil de resolver, siendo su solución general $y=Ke^{-2x}$. Ahora buscamos una solución particular de la forma $y=A\cos x+B\,\mathrm{sen}\,x$. Al sustituir en la ecuación

$$-A\,\mathrm{sen}\,x+B\cos x+2A\cos x+2B\,\mathrm{sen}\,x=5\,\mathrm{sen}\,x \quad\Rightarrow\quad B+2A=0, \quad -A+2B=5,$$

simplemente igualando coeficientes de senos y cosenos. De aquí, $B = 2$, $A = -1$ y se obtiene la solución particular $y = 2\operatorname{sen} x - \cos x$ y por tanto la solución general $y = 2\operatorname{sen} x - \cos x + Ke^{-2x}$.

En casos especiales, cuando intentamos ajustar coeficientes para obtener la solución particular se obtiene una contradicción (un sistema incompatible). Esto está relacionado con el fenómeno de la *resonancia* en Física, y también con lo que hemos visto anteriormente de ecuaciones homogéneas con raíces múltiples. Como en ese caso debemos multiplicar nuestra conjetura de solución particular por x o, si no fuera suficiente (lo cual ocurre en el caso de raíces múltiples), por una potencia mayor de x.

Ejemplo. Volvamos a la ecuación del movimiento armónico simple pero ahora con un término no homogéneo (que físicamente corresponde a una fuerza externa):

$$y'' + y = 4\operatorname{sen} x$$

Ya sabíamos que la solución general de la ecuación homogénea es $y = K_1 \cos x + K_2 \operatorname{sen} x$. Si buscamos una solución particular de la forma $y = A\cos x + B\operatorname{sen} x$, al sustituir en la ecuación obtenemos $0 = 4\operatorname{sen} x$ que no tiene sentido, lo cual es lógico porque esta función que estamos probando resuelve la homogénea. Entonces probamos $y = Ax\cos x + Bx\operatorname{sen} x$,

$$\begin{cases} y' = (-A\operatorname{sen} x + B\cos x)x + A\cos x + B\operatorname{sen} x \\ y'' = -(A\cos x + B\operatorname{sen} x)x - 2A\operatorname{sen} x + 2B\cos x \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y'' + y = -2A\operatorname{sen} x + 2B\cos x.$$

Al igualar a $4\operatorname{sen} x$, se sigue $A = -2$, $B = 0$ y nuestra solución particular es $y = -2x\cos x$. En definitiva, la solución general es

$$y = -2x\cos x + A\cos x + B\operatorname{sen} x.$$

Esta solución toma valores arbitrariamente grandes cuando x crece. Físicamente significa que si empujamos un columpio con la frecuencia adecuada, podemos aumentar las oscilaciones indefinidamente. Si en el enunciado hubiéramos considerado $y'' + y = 4\operatorname{sen}(2x)$ la solución general sería $y = -\frac{4}{3}\operatorname{sen} x + A\cos x + B\operatorname{sen} x$ que sí permanece acotada, porque el impulso está desacompasado con respecto a la frecuencia del columpio.

Referencias. Hay muchos métodos para resolver ecuaciones diferenciales. Algunos textos orientados sobre todo a la práctica de la resolución son [Sim72] y [KKM84], el primero tiene también teoría y notas históricas, el segundo es una colección de ejercicios. En [Str80] se muestra brevemente la conexión con el álgebra lineal. Por muchos métodos que aprendamos no hay que perder de vista que es imposible resolver muchas ecuaciones diferenciales de aspecto bastante sencillo y por ello, en la práctica, es importante tener alguna idea sobre los métodos numéricos o sobre el aspecto cualitativo de las soluciones. Estos temas se tratan por ejemplo en [Sim72].

Referencias

[KKM84] A. Kiseliov, M. Krasnov, and G. Makarenko. *Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.* "Mir", Moscow, 1984.

[Sim72] G. F. Simmons. *Differential equations with applications and historical notes.* McGraw-Hill Book Co., New York-Düsseldorf-Johannesburg, 1972. International Series in Pure and Applied Mathematics.

[Str80] G. Strang. *Linear algebra and its applications.* Academic Press, New York-London, second edition, 1980.