Sección 1.7: Aproximación de funciones. Desarrollo de Taylor.

Aproximación lineal.

La aproximación lineal de una función $y = f(x)$ en un punto $x = a$ es la recta tangente. Como su pendiente es $f'(a)$ la ecuación de la recta tangente es $y - f(a) = f'(a)(x - a)$. Entonces,

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

es la aproximación lineal de $y = f(x)$ en $x = a$.

Ejemplo 1: Calcula la aproximación lineal de $f(x) = \ln x$ en $x = 1$ y úsala para dar una aproximación de $\ln(1,05)$. Calcula el valor obtenido con el valor de tu calculadora.

S./ Como $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ se tiene $f'(1) = 1$. La aproximación lineal es $y = f(1) + 1(x - 1) = x - 1$. Entonces, $\ln(1,05) \approx 1,05 - 1 = 0,05$. Con una calculadora, $\ln(1,05) \approx 0,048790$. La diferencia entre los dos valores es $|0,05 - 0,048790| = 0,001210 < 0,002$.

Si usamos la notación $\Delta x = x - a$ y $\Delta y = f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a)$, la aproximacion lineal nos permite escribir

$$\Delta y \approx f'(a)\Delta x$$

para aproximar el valor de y cuando x está cerca de a.

Ejemplo 2: El radio de una bola mide $0,7\,cm$. Si la medida del radio de la bola es correcta con un error de $0,01\,cm$, estima el error absoluto y el error relativo que se produce al calcular el volumen V de la bola.

S./ El enunciado del problema nos permite escribir $r = 0,7\,cm$ y $\Delta r = \pm 0,01\,cm$. Sabemos que $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Queremos estimar el error absoluto que se comete al calcular V, es decir ΔV. Usamos la fórmula de aproximación anterior para escribir

$$\Delta V \approx V'(0,7)\Delta r = 4\pi(0,7)^2(\pm\, 0,01) \approx \pm 0,061575\,cm^3\,.$$

El error relativo es, para $r = 0,7$,

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{V'(r)\Delta r}{V(r)} = \frac{4\pi r^2 \Delta r}{(4/3)\pi r^3} = \frac{3}{r}(\pm 0,01) = \frac{3}{0,7}(\pm 0,01) \approx \pm 0,04286.$$

Se produce un error relativo de aproximadamente $4,29\%$.

Polinomio de Taylor.

Para una función f que se puede derivar n veces, el polinomio de Taylor de f de grado n centrado en c es:

$$P_{n,c}(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x - c)^3 + \cdots\cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n\,.$$

Recuerda: $n! = n(n - 1)(n - 2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Ejemplo 3: a) Calcula los polinomios de Taylor de grados 1, 2 y 3 centrados en $c = 0$ de la función $f(x) = e^x$.

b) Usa $P_{3,0}$ para hallar un valor aproximado de $e^{0,1}$ y compáralo con el valor de tu calculadora.

c) Representa con un programa de ordenador la función y los tres polinomios $P_{1,0}, P_{2,0}$ y $P_{3,0}$. ¿Cuál de ellos aproxima mejor a la función?

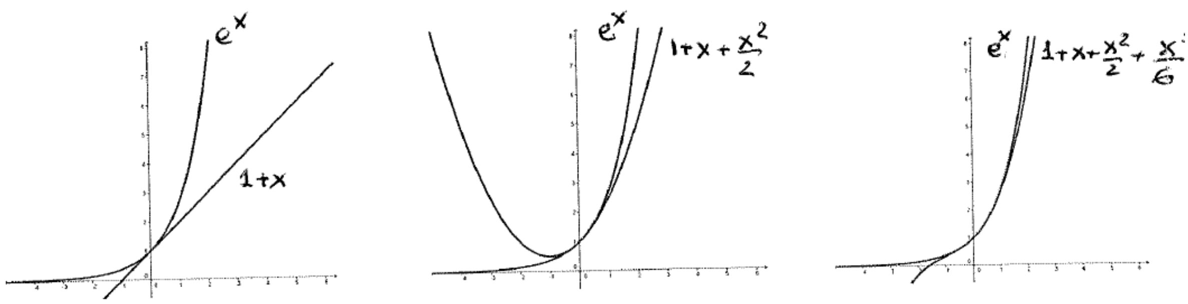
d) Escribe la fórmula para el polinomio de Taylor de grado n centrado en $c = 0$ de la función $f(x) = e^x$.

S./ a) Usando la fórmula dada para el polinomio de Taylor se obtiene

$$P_{1,0}(x) = 1 + x\,, \qquad P_{2,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}\,, \qquad P_{3,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\,.$$

b) $e^{0,1} = f(0,1) \approx P_{3,0}(0,1) = 1 + 0,1 + \frac{(0,1)^2}{2} + \frac{(0,1)^3}{6} \approx 1,105166$. Una calculadora produce $e^{0,1} \approx 1,105170$. La diferencia es $|1,105170 - 1,105166| = 0,000004$.

c)



d)

$$P_{n,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\,.$$

Otros polinomios de Taylor

1. El polinomio de Taylor de orden n alrededor de $c = 1$ de la función $f(x) = \ln x$ es:

$$P_{n,1}(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \cdots\cdots + (-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\frac{(x-1)^k}{k}\,.$$

2. El polinomio de Taylor de orden $2n$ alrededor de $c = 0$ de la función $f(x) = \cos x$ es:

$$P_{2n,0}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\,.$$

3. El polinomio de Taylor de orden $2n+1$ alrededor de $c = 0$ de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ es:

$$P_{2n+1,0}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,.$$

Error de la aproximación con el polinomio de Taylor

El error de aproximar la función $f(x)$ por su polinomio de Taylor $P_{n,c}$ se estima con la fórmula de **Lagrange**:

$$E(x) = |f(x) - P_{n,c}(x)| = \frac{1}{(n+1)!}|x-c|^{n+1}|f^{(n+1)}(z)|\,,$$

donde z es un punto intermedio entre x y c.

EJEMPLO 4: El polinomio de Taylor de grado 3 centrado en $c = 0$ de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ es $P_{3,0}(x) = x - \frac{x^3}{3!}$. Usalo para aproximar sen $(0,1)$ por $P_{3,0}(0,1)$ y determina una acotación del error con la fórmula de Lagrange.

S./

$$\operatorname{sen}(0,1) \approx P_{3,0}(0,1) = 0,1 - \frac{(0,1)^3}{6} \approx 0,099833\,.$$

El error de esta aproximacion está acotado por

$$E(x) = \frac{1}{4!}|x|^4|\operatorname{sen} z| \leq \frac{1}{4!}|x|^4\,.$$

Poniendo $x = 0,1$ se tiene $E(x) \leq \frac{1}{4!}(0,1)^4 \approx 0,000004\,.$

Polinomios de Taylor de funciones compuestas.

Los polinomios de Taylor de funciones compuestas $f(g(x))$, cuando $g(x)$ es un polinomio, pueden obtenerse a partir de los polinomios de Taylor de $f(y)$, sustituyendo y por $g(x)$.

EJEMPLO 5: Halla el polinomio de Taylor de grado $2n$ centrado en $c = 0$ para la función $f(x) = e^{x^2}$.

S./ Como el polinomio de Taylor de grado n centrado en $c = 0$ para la función $f(y) = e^y$ es:

$$P_{n,0}(y) = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \cdots\cdots + \frac{y^n}{n!}\,,$$

sustituyendo y por x^2 se obtiene

$$P_{2n,0}(x) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots\cdots + \frac{x^{2n}}{n!}\,.$$

Series de potencias

Si x es una variable, la serie infinita de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots\cdots + a_n x^n + \cdots\cdots$$

se llama **serie de potencias**. La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots\cdots + a_n(x-c)^n + \cdots\cdots$$

se llama **serie de potencias centrada en** c.

EJEMPLO 6: La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\cdots$$

es una serie de potencias centrada en $c = 0$. La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x+1)^n = 1 - (x+1) + (x+1)^2 - (x+1)^3 + \cdots\cdots$$

es una serie de potencias centrada en $c = -1$.

Las series de potencias pueden verse como una función

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n \,,$$

cuyo dominio de definición son los valores de x para los cuales la serie converge, es decir su suma da un número finito.

Criterio de convergencia para series de potencias.

Sea $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ una serie de potencias centrada en c y sea

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \,.$$

a) Si $R = 0$, la serie converge solo en $x = c$.
b) Si $R > 0$, la serie converge en $\{x : |x-c| < R\} = (c-R, c+R)$ y diverge en $\{x : |x-c| > R\}$.
c) Si $R = \infty$, la serie converge en $(-\infty, \infty)$.

El número R se llama **radio de convergencia** de la serie de potencias.

Ejemplo 7: Halla los radios de convergencia de las series de potencias siguientes:

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n \qquad b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{(2n+1)}}{(2n+1)!} \qquad c) \sum_{n=0}^{\infty} 3(x-2)^n \,.$$

S./ a) Como $R = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, la serie solo converge en $x = 0$.

b) Como $R = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(2n+1)!}}{\frac{1}{(2n+3)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)!}{(2n+1)!} = \lim_{n\to\infty} (2n+3)(2n+2) = \infty$, la serie converge en $(-\infty, \infty)$.

c) Como $R = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3}{3} = 1$, la serie converge en $\{x : |x-2| < 1\} = (2-1, 2+1) = (1, 3)$.

Derivación e integración de series de potencias

Las series de potencias pueden derivarse e integrarse en su intervalo de convergencia. La derivación y la integracion se hacen término a término.

Series de Taylor.

Se llama serie de Taylor de una función f infinitamente derivable a la serie que se obtiene aplicanco la fórmula para obtener el polinomio de Taylor. La serie de Taylor representa a la función f en el intervalo en el que converge.

Por ejemplo, la serie de Taylor de $f(x) = e^x$ es

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} == 1 + x + \frac{x}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\cdots \,.$$

y como el radio de convergencia de esta serie de potencias es $R = \infty$, la serie de Taylor representa a la función en todo $\mathbb{R}$.

La serie de Taylor de $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ es

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\cdots + x^n + \cdots\cdots .$$

y como el radio de convergencia de esta serie de potencias es $R = 1$, la serie de Taylor representa a la función en el intervalo $(-1, 1)$.