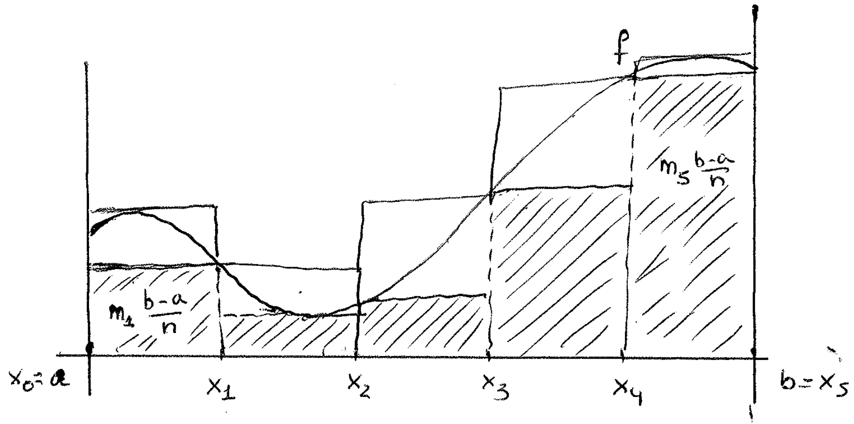
SECCIÓN 1.6: INTEGRACIÓN Y APLICACIONES.

La integral sirve para calcular áreas de figuras planas limitadas por curvas. Para definir la integral de una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ se utilizan áreas orientadas de rectángulos. Esta idea se deba a A. L. Cauchy (1789 - 1857) y fue perfeccionada por G. F. Riemann (1826 - 1866).

Supongamos que la función f toma valores positivos. Se divide el intevalo $[a, b]$ en n partes (5 partes iguales en la figura). En cada uno de estos intervalos se calcula el área del rectángulo más grande contenido bajo la gráfica de la función (rectángulos rayados en la figura) con base en el intervalo y el área del rectángulo más pequeño que contiene a la gráfica de la función con base en el intervalo.

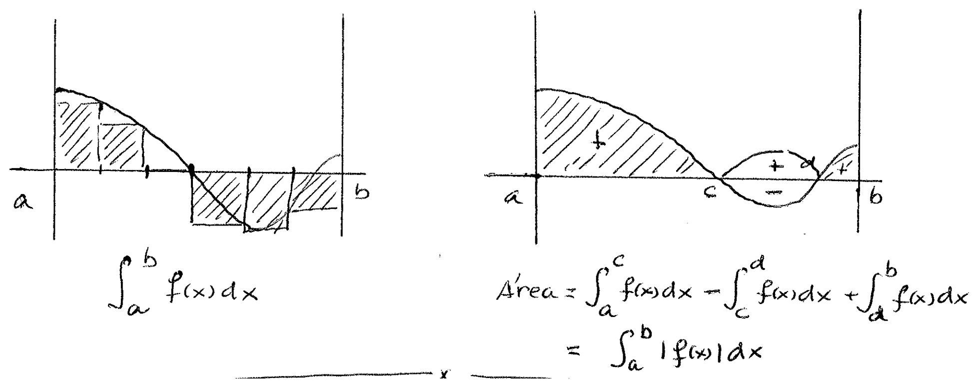


Si al hacer que el número de intervalos n tienda a infinito (o lo que es lo mismo, la longitud de los subintervalos tiende a cero) la suma de las áreas de los rectángulos por debajo de la gráfica de la función y la suma de las áreas de los rectángulos por encima de la función es la misma, decimos que la función f es **integrable** en el intervalo $[a, b]$ y escribimos

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

para indicar este límite. La fórmula anterior se lee: integral entre a y b de $f(x)$. También se llama **integral definida**.

El concepto de integral definida se extiende a funciones $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ (no necesariamente positivas). En este caso los rectángulos tienen altura negativa y us área se considera negativa. Aquí la interpretación geométrica de la integral definida no es el área (ver la interpretación en la parte derecha de la siguiente figura).



La integral definida tiene las siguientes propiedades para funciones f y g que sean integrables

- 1. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx$
- 2. $\int_a^b kf(x)\, dx = k \int_a^b f(x)\, dx$
- 3. $\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$
- 4. $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$
- 5. Si $f \geq 0$, $\int_a^b f(x)\, dx \geq 0$
- 6. Si $f(x) \leq g(x)$ en $[a,b]$, $\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$

El teorema del valor medio para integrales. Si la función f es continua en el intervalo $[a,b]$, existe un número c en $[a,b]$ tal que $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = f(c)(b-a)$.

Teorema fundamental del cálculo

Es tedioso calcular integrales definidas usando la definición. El mátemático/físico inglés I. Newton y el matemático/diplomático alemán G. Leibniz se dieron cuenta que el problema de calcular integrales tenía relación con las derivadas.

Teorema fundamental del cálculo. Si la función f es continua en el intervalo $[a,b]$, la función

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt\,, \qquad a \leq x \leq b\,,$$

es derivable en $[a,b]$ y se cumple $\displaystyle\frac{d}{dx}F(x) = f(x)\,.$

Ejemplo 1: Calcula la derivada de las siguientes funciones usando el teorema fundamental del cálculo (TFC):

$$a)\ F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt; \qquad b)\ G(x) = \int_1^{x^2} (\operatorname{sen} t)\, dt; \qquad c)\ H(x) = \int_x^{2x} \sqrt{t^2+1}\, dt\,.$$

S./ a) Por el TFC, $\displaystyle\frac{dF}{dx} = e^{-x^2}$.

b) Aquí hay que usar el TFC y la regla de la cadena. Sea $u = x^2$ por lo que $G(x) = \int_1^u (\operatorname{sen} t)\, dt$. Etonces

$$\frac{dG}{dx} = \frac{dG}{du}\frac{du}{dx} = (\operatorname{sen} u) \cdot 2x = (\operatorname{sen} x^2) \cdot 2x\,.$$

c) Primero escribimos

$$H(x) = \int_0^{2x} \sqrt{t^2+1}\, dt - \int_0^x \sqrt{t^2+1}\, dt$$

por las propiedades de la integral (el 0 puede ser sustituido por cualquier número). Ahora se usa el TFC y la regla de la cadena:

$$\frac{dH}{dx} = \sqrt{(2x)^2+1} \cdot 2 - \sqrt{x^2+1} = 2\sqrt{4x^2+1} - \sqrt{x^2+1}\,.$$

Primitiva de una función. Dada una función f se llama **primitiva** de f a otra función F tal que $\dfrac{dF}{dx} = f(x)$.

La primitiva $F(x)$ de una función f no es única, porque si $G(x) = F(x) + C$ se tiene que $F'(x) = G'(x)$. Se escribe

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

para denotar todas las primiticas de f. La parte izquierda de esta fórmula se lee **integral de** $f(x)$ y se llama **integral indefinida** de $f(x)$.

Por el Teorema Fundamental del Cálculo, las primitivas de las funciones elementales se obtiene mirando la tabla de derivadas de izquierda a derecha.

Integrales indefinidas elementales.

- 1. $\displaystyle\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}\,dx + C \quad (a \neq -1)$
- 2. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$
- 3. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$
- 4. $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

Integrales indefinidas de funciones trigonométricas.

- 5. $\displaystyle\int (\cos x)\,dx = \operatorname{sen} x + C$
- 6. $\displaystyle\int (\operatorname{sen} x)\,dx = -\cos x + C$
- 7. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C$

Integrales indefinidas de funciones trigonométricas e hiperbólicas inversas.

- 8. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} x + C$
- 9. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C$
- 10. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \operatorname{arcsenh} x + C = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$

Regla de Barrow. Si $F(x)$ es una primitiva de la función $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$ se tiene que

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\,.$$

Ejemplo 2: Evalua las siguientes integrales usando la regla de Barrow:

$$a)\int_{-1}^{2}(x^3-3)\,dx;\qquad b)\int_0^{\pi}\operatorname{sen}x\,dx;\qquad c)\int_{-4}^{-2}\frac{1}{x}\,dx\,.$$

S./ a)

$$\int_{-1}^{2}(x^3-3)\,dx = \Big[\frac{x^4}{4}-3x\Big]_{-1}^{2} = \Big(\frac{16}{4}-6\Big)-\Big(\frac{1}{4}+3\Big) = -\frac{21}{4}\,.$$

b)

$$\int_0^{\pi}\operatorname{sen}x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = -\cos\pi-(-\cos 0) = 1+1 = 2\,.$$

c)

$$\int_{-4}^{-2}\frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln|x|\Big]_{-4}^{-2} = \ln 2 - \ln 4 = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2\,.$$

Cambio de variable en la integral

La fórmula del cambio de variable en la integral es una consecuencia de la regla de la cadena para las derivadas. La fórmula es:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du\,.$$

No hay que recordar esta fórmula. Es mejor aprender a aplicarla estudiando los ejemplos.

Ejemplo 3: Evalua las siguientes integrales indefinidas:

$$a)\int xe^{x^2}\,dx;\qquad b)\int\frac{1}{x\ln x}\,dx;$$

S./ a) Con $u=x^2$ tenemos $du=2xdx$ y por tanto $xdx=du/2$. Sustituyendo en la integral se obtiene:

$$\int xe^{x^2}\,dx = \int e^u\frac{du}{2} = \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{x^2}+C\,.$$

b) Con $u=\ln x$ tenemos $du=\frac{1}{x}dx$. Por tanto,

$$\int\frac{1}{x\ln x}\,dx = \int\frac{1}{u}du = \ln|u|+C = \ln|\ln x|+C.$$

Las fórmulas

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}\qquad y\qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

permiten calcular las integrales

$$\int\cos^2 x\,dx\qquad y\qquad \int\operatorname{sen}^2 x dx\,.$$

EJEMPLO 4: Evalua $\displaystyle\int \sqrt{9-x^2}\,dx$.

S./ Aquí hay que hacer la sustitución trigonométrica $x = 3\,\mathrm{sen}\,t$ ya que entonces $dx = 3\cos t\,dt$ y se tiene:

$$\int \sqrt{9-x^2}\,dx = \int \sqrt{9-9\sin^2 t}\,3\cos t\,dt = 9\int \cos^2 t\,dt$$

y esta integral se hace usando la primera de las fórmulas anteriores.

Integración por partes

La fórmula de integración por partes se deduce de la fórmula para la derivada de un producto. Para la integral definida la fórmula es:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx\,.$$

Con $u = f(x)$ y $v = g(x)$ esta fórmula se traduce para la integral indefinida en:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du\,.$$

EJEMPLO 5: Calcula $\int x\cos x\,dx$.

S./ Hacemos $u = x$ con lo que $du = dx$. También hacemos $dv = \cos x\,dx$ con lo que se obtiene $v = \mathrm{sen}\,x$. Entonces,

$$\int x\cos x\,dx = x\,\mathrm{sen}\,x - \int \mathrm{sen}\,x\,dx = x\,\mathrm{sen}\,x + \cos x + C\,.$$

Integración de funciones racionales

Una función racional es de la forma $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son dos polinomios. Mostraremos como resolver las integrales de este tipo de funciones en tres casos.

Caso I. Funciones racionales de la forma $\dfrac{A}{(ax+b)^n}$ $\quad n = 1, 2, 3, \dots$ En este caso se hace la sustitución $ax + b = u$ y la nueva integral es elemental.

EJEMPLO 6: Calcula $\displaystyle\int \frac{2}{3x-5}\,dx$.

S./ Se hace $u = 3x - 5$ con lo que tenemos $du = 3\,dx$ y $dx = du/3$. Entonces,

$$\int \frac{2}{3x-5}\,dx = \int \frac{2}{u}\frac{1}{3}\,du = \frac{2}{3}\ln|u| + C = \frac{2}{3}\ln|3x-5| + C\,.$$

Caso II. Funciones racionales de la forma $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$, donde $Q(x)$ puede descomponerse en factores lineales. El método que se utiliza es el **método de descomposición en fracciones simples** que se muestra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 7: Evalua $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx$

S./ Las soluciones de $x^2 - 5x + 6 = 0$ son $x = 2$ y $x = 3$, por lo que podemos escribir $x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$. Se buscan ahora dos números A y B tales que

$$\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}\,.$$

Los valores de A y B se calculan igualando los numeradores de esta expresión. El resultado es $A = 1, B = -1$. Por tanto

$$\int \frac{1}{x^2 - 5x + 6}\, dx = \int \frac{1}{x-3}\, dx + \int \frac{-1}{x-2}\, dx = \ln|x-3| - \ln|x-2| + C\,.$$

Caso III. Funciones racionales de la forma $\dfrac{C}{ax^2+bx+c}$, cuando ax^2+bx+c no tiene raices reales. En este caso hay que completar cuadrados en el denominador y la integral será la de un arctg después de hacer una sustitución.

Ejemplo 8: Evalua $\displaystyle\int \frac{2}{x^2-2x+5}\, dx$

S./ Como el denominador no tiene raices reales, completamos cuadrados para obtener $x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4$. Por tanto

$$I = \int \frac{2}{x^2-2x+5}\, dx = \int \frac{2}{(x-1)^2+4}\, dx\,.$$

Esta última integral se hace con la sustitución $x - 1 = 2\,u$ y se obtiene:

$$I = \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2} + C\,.$$

Integrales impropias

Hay dos tipos de integrales impropias:

I. Integrales impropias con límites de integración infinito o menos infinito.
II. Integrales impropias de funciones con asíntotas verticales.

En ambos casos las integrales se resuelven hallando el límite de integrales definidas, como se muestra en los ejemplos siguientes. Si el límite que tenemos que calcular existe, decimos que la integral impropia es **convergente**; si no existe, decimos que es **divergente**.

Ejemplo 9: Evalua la integral impropia $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\, dx$.

S./ Es una integral impropia del tipo I. Escribimos

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\, dx = \lim_{M\to\infty} \int_0^M \frac{1}{x^2+1}\, dx = \lim_{M\to\infty} \Big[\operatorname{arctg} x\Big]_0^M = \lim_{M\to\infty} \operatorname{arctg} M = \frac{\pi}{2}\,.$$

La integral es convergente.

Ejemplo 10: Evalua $\displaystyle I = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx\,.$

S./ Es también una integral lmpropia del tipo I, pero ahora tiene como límites $-\infty$ y ∞. Se elige un número cualquiera, por ejemplo el 0, y se calculan los límites por ambos lados. El cambio de variable $u = e^x$ produce $du = e^x\, dx$. Así que

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx = \int \frac{1}{1+u^2}\, du = \operatorname{arctg} u + C = \operatorname{arctg} e^x + C.$$

Para calcular I escribimos la integral como suma de dos integrales indefinidas:

$$I = \int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx + \int_0^\infty \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx\,.$$

Cada una de ellas la ponemos como límite de integrales definidas:

$$I = \lim_{N\to-\infty} \int_N^0 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx + \lim_{M\to\infty} \int_0^M \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx \;=\; \lim_{N\to-\infty} \Big[\operatorname{arctg} e^x\Big]_N^0 + \lim_{M\to\infty} \Big[\operatorname{arctg} e^x\Big]_0^M = \frac{\pi}{2}\,.$$

La integral es convergente.

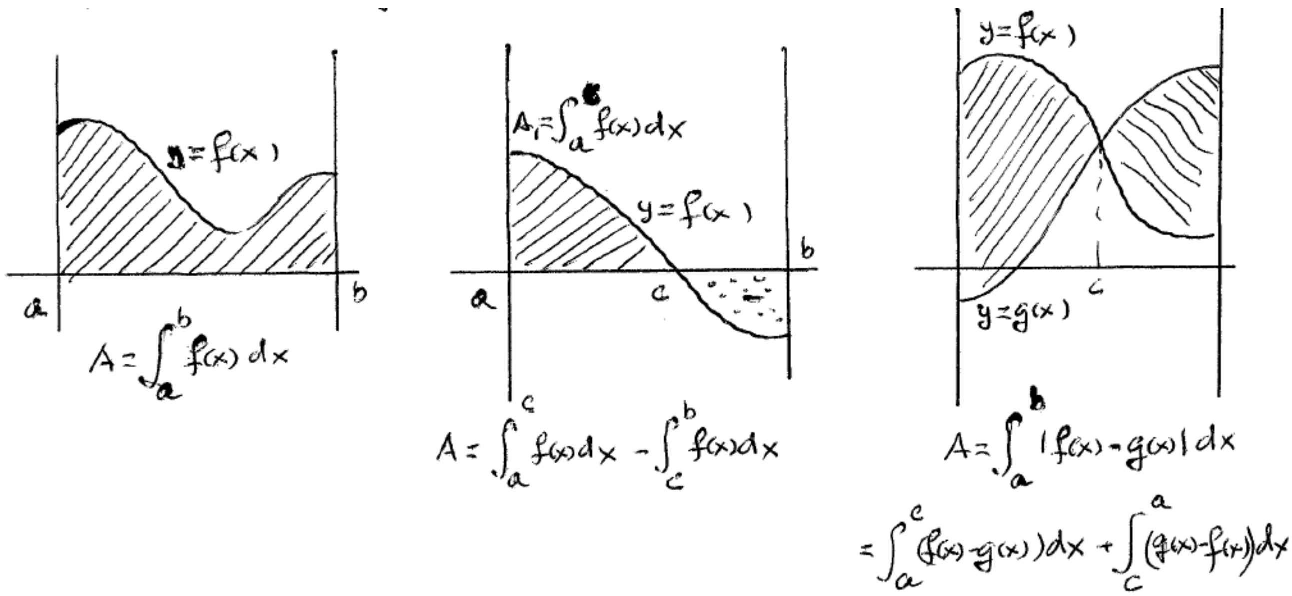
Ejemplo 11: Evalua $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

S./ La función que se quiere integrar tiene una asíntota vertical en $x=0$, luego es una función del tipo II. Tenemos que tomar límites de integrales definidas en intervalos $[c,1]$ y hacer que c tienda a 0 por la derecha:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{c\to0^+} \int_c^1 x^{-1/3}\,dx = \lim_{c\to0^+} \left[\frac{x^{2/3}}{2/3}\right]_c^1 = \frac{3}{2}\,.$$

La integral es convergente.

Área de una región entre dos curvas.



El área limitada por la gráfica de una función positiva y el eje OX en el intervalo $[a,b]$ se calcula con la integral, como se indica en la figura de la izquierda.

Para hallar el área limitada por la gráfica de una funcion no necesariamente positiva y el eje OX en el intervalo $[a,b]$, se identifican los puntos en los que la gráfica de la función corta al eje OX y se calcula cada una de las integrales teniendo en cuenta que la integral por debajo del eje OX hay que tomarla negativa (ver la figura del centro).

Para hallar el área limitada por la gráfica de dos funciones f y g se hallan los puntos de corte entre si y se escriben las integrales correspondientes de manera que el resultado de cada una de ellas sea siempre positivo (ver la figura de la derecha).

Volumen de un solido de revolución

El volumen del sólido que se obtiene al girar la región limitada por la gráfica de la función positiva $y=f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[a,b]$ se calcula con la fórmula:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx\,.$$

EJEMPLO 12: Comprueba que el volumen de una esfera de radio R es $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Longitud de una curva

La longitud de la curva determinada por la gráfica de una función $y = f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ se calcula con la fórmula

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx\,.$$

EJEMPLO 13: Comprueba que longitud de una circunferencia de radio R es $L = 2\pi R$.

Área de un superficie de revolución

El área de la superficie de revolución que se obtiene al girar la gráfica de la función $y = f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ se calcula con la fórmula

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\, \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx\,.$$

EJEMPLO 14: Comprueba que la superficie de una esfera de radio R es $L = 4\pi R^2$.