Sección 1.5: Aplicaciones de la derivada.

Máximos y mínimos (absolutos) de una función. Sea f una función definida en un conjunto I que contiene un punto c.

a) $f(c)$ es un **mínimo (absoluto)** de f en I si $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in I$.

b) $f(c)$ es un **máximo (absoluto)** de f en I si $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in I$.

El teorema de los valores extremos. Si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, f alcanza siempre su máximo y su mínimo (absolutos) en $[a, b]$.

Extremos relativos o locales.

a) $f(c)$ es un **máximo relativo (o local)** de la función f si existe un intervalo que contiene a c para el que $f(c)$ es un máximo.

b) $f(c)$ es un **mínimo relativo (o local)** de la función f si existe un intervalo que contiene a c para el que $f(c)$ es un mínimo.

Puntos críticos. Sea f definida en c. El punto c es un **punto crítico** de f si $f'(c) = 0$ o f' no existe en c.

Cálculo de extremos (absolutos) en un intervalo cerrado.

Sea f una funcíón definida en el intervalo cerrado $[a, b]$.

1. Halla los puntos críticos de f en (a, b) (no olvides los puntos en los que f' no exite).
2. Calcula $f(c)$ para cada punto crítico c de (a, b).
3. Calcula f en cada uno de los extremos del intervalo $[a, b]$.
4. El menor de estos valores es el mínimo (absoluto). El mayor es el máximo (absoluto).

Ejemplo 1: Halla los extremos absolutos de $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ en el intervalo $[-1, 2]$.

S./ Los puntos críticos son las soluciones de la ecuacion $f'(x) = 0$. Estas son las soluciones de $12x^2(x - 1) = 0$, que son $x = 0$ y $x = 1$. Calculamos $f(0) = 0$ y $f(1) = -1$. Ahora calculamos los valores de f en los extremos del intervalo: $f(-1) = 7$ y $f(2) = 16$. El minimo (absoluto) es -1 y se alcanza en $x = 1$ y el máximo (absoluto) es 16 y se alcanza en $x = 2$.

Ejemplo 2: Halla los extremos absolutos de $f(x) = 2x - 3x^{2/3}$ en el intervalo $[-1, 3]$.

S./ Se tiene $f'(x) = 2 - 2x^{-1/3}$. Como $f'(x)$ no existe en $x = 0$ éste es un punto crítico. Además, $f'(x) = 0$ produce $x = 1$. Calculamos $f(0) = 0$ y $f(1) = -1$. Ahora calculamos los valores de f en los extremos del intervalo: $f(-1) = -5$ y $f(3) = -0,24$. El minimo (absoluto) es -5 y se alcanza en $x = -1$ y el máximo (absoluto) es 0 y se alcanza en $x = 0$.

El teorema del valor medio (TVM). Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b). Existe un número c en (a, b) tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Ejemplo 3: Dada $f(x) = 5 - (4/x)$, halla todos los valores de c que cumplen el teorema del valor medio en el intervalo $(1\ ,\ 4)$.

s./ Se tiene $\frac{f(4)-f(1)}{4-1} = 1$. Luego hay que hallar todos los valores $x \in (1\,,\,4)$ tal que $f'(x) = 1$. Como $f'(x) = 4/x^2$, tenemos que resolver la ecuacion $4/x^2 = 1$. Deducimos $x = 2$ y $x = -2$. Pero solo $x = 2$ está en el intervalo $(1\,,\,4)$, luego el TVM se cumple para $c = 2$.

El Teorema del Valor Medio tiene muchas consecuencias. La primera de ellas el la **Regla de L'Hôpital** para resolver indeterminaciones de la forma $0/0$ o $\pm\infty/\pm\infty$ en el cálculo de límites.

Regla de L'Hôpital. Sean f y g dos funciones derivables en el intervalo (a, b) y c un punto de este intervalo. Si al calcular $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ sustituyendo x por c sale $0/0$ o $\pm\infty/\pm\infty$ se tiene que

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}\,,$$

siempre que el límite de la derecha exista o sea ∞ o $-\infty$.

Nota: La Regla de L'Hôpital también vale para límites laterales y cuando $c = \pm\infty$.

Ejemplo 4: Evalua $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}$.

S./ Al sustituir x por 0 se tiene la indeterminación $0/0$. Se usa la Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{1} = 2.$$

Ejemplo 5: Evalua $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}$.

S./ Al sustituir x por ∞ se tiene la indeterminación ∞/∞. Se usa la Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2(\ln x)/x}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{2(\ln x)}{x}.$$

Al sustituir x por ∞ en este último limite se obtiene de nuevo la indeterminación ∞/∞. Así que podemos usar de nuevo la Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2/x}{1} = 2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0.$$

Ejemplo 6: Evalua $\lim_{x\to\infty} e^{-x}\sqrt{x}$.

S./ Al sustituir x por ∞ se tiene la indeterminación $0\cdot\infty$. Pero si escribimos $e^{-x}\sqrt{x} = \frac{\sqrt{x}}{e^x}$ se tiene la indeterminación ∞/∞. Se usa ahora la Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\sqrt{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1/2\sqrt{x}}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}e^x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Las indeterminaciones 1^∞ y 0^0 también pueden tratarse con la Regla de L'Hôpital, pero antes de hacerlo hay que tomar el logaritmo neperiano.

Ejemplo 7: Prueba que $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$.

S./ Sea $L = \displaystyle\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$. Tomando logaritmos neperianos en ambos lados de esta igualdad se tiene

$$\ln L = \lim_{x\to\infty}\ln(1+\frac{1}{x})^x = \lim_{x\to\infty} x\ln(1+\frac{1}{x}) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{1/x}\,.$$

Al sustituir en el último límite x por ∞ se obtiene la indeterminación $0/0$ y podemos aplicar la Regla de L'Hôpital:

$$\ln L = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{1/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-1/x^2}{1+(1/x)}}{-1/x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+1/x} = 1\,.$$

Por tanto $\ln L = 1$, de donde deducimos $L = e$.

Funciones crecientes y decrecientes.

a) Una función f es **creciente** en un intervalo I si para todo $x_1 < x_2$ de I se tiene $f(x_1) < f(x_2)$.

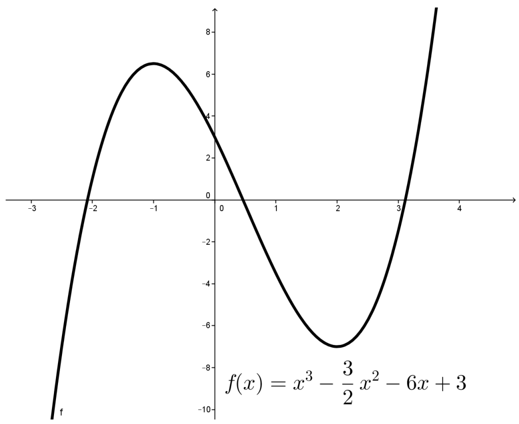
b) Una función f es **decreciente** en un intervalo I si para todo $x_1 < x_2$ de I se tiene $f(x_1) > f(x_2)$.

Criterio de la primera derivada para crecimiento y decrecimiento de funciones. Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b).

a) Si $f'(x) > 0$ en (a, b), entonces f es creciente en $[a, b]$.

b) Si $f'(x) < 0$ en (a, b), entonces f es decreciente en $[a, b]$.

c) Si $f'(x) = 0$ en (a, b), entonces f es constante en $[a, b]$.



Ejemplo 8: Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 - 6x + 3$ en toda la recta real. S./ Los puntos críticos son las soluciones de $f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 = 3(x+1)(x-2) = 0$, que son $x = 2$ y $x = -1$. Se estudia en qué intervalos la derivada es positiva o negativa, tomando los puntos críticos como puntos de separación. Estudiando el signo de cada uno de los factores se concluye que $f(x)$ es creciente en $(-\infty, -1)$, decreciente en $(-1, 2)$ y creciente en $(2, \infty)$.

Criterio de la primera derivada para hallar máximos y mínimos locales. Sea f una función continua en un intervalo abierto I y c un punto crítico de f en I. Si f es derivable en I, excepto quizá en c, se tiene:

a) Si $f'(x)$ pasa de ser positiva a negativa en c cuando x se mueve de izquierda a derecha, entonces $f(c)$ es un máximo local o relativo de f.

b) Si $f'(x)$ pasa de ser negativa a positiva en c cuando x se mueve de izquierda a derecha, entonces $f(c)$ es un mínimo local o relativo de f.

Criterio de la segunda derivada para hallar máximos y mínimos locales. Sea f una función tal que $f'(c) = 0$ y f es derivable dos veces.

a) Si $f''(c) > 0$, $f(c)$ es un **mínimo relativo** de f.

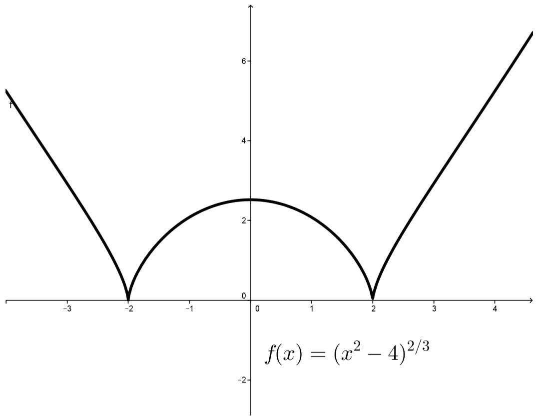
b) Si $f''(c) < 0$, $f(c)$ es un **máximo relativo** de f.

Ejemplo 9: Halla los extremos relativos y absolutos de la función $f(x) = (x^2 - 4)^{2/3}$ en $(-\infty, \infty)$.

S./ La función es continua en toda la recta real y

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x^2 - 4)^{-1/3} 2x = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2 - 4}}$$

Luego la derivada no existe en $x = 2$ ni en $x = -2$. Luego, $x = 2$ y $x = -2$ son puntos críticos de f, además de $x = 0$ que hace $f'(x) = 0$. El estudio del signo de la primera derivada produce el siguiente resultado: la función es decreciente en $(-\infty, -2)$, es creciente en $(-2, 0)$, es decreciente en $(0, 2)$ y creciente en $(2, \infty)$.



Con estos datos podemos concluir:

i) $f(x)$ tiene un mínimo relativo en $x = -2$ y su valor es $f(-2) = 0$.

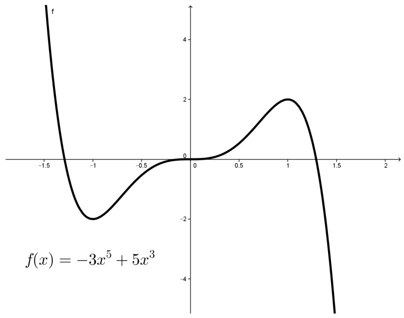
ii) $f(x)$ tiene un máximo relativo en $x = 0$ y su valor es $f(0) = \sqrt[3]{16}$.

iii) $f(x)$ tiene un mínimo relativo en $x = 2$ y su valor es $f(2) = 0$.

Observa que no puede aplicarse el criterio de la segunda derivada en $x = -2$ y en $x = 2$.

El mínimo absoluto de la función f en toda la recta real es 0 y se alcanza tanto en $x = -2$ como en $x = 2$. Esta función no tiene máximo absoluto en toda la recta real.

Ejemplo 10: Prueba que la función $f(x) = -3x^5 + 5x^3$ tiene como puntos críticos $x = 0, x = 1$ y $x = -1$. Utiliza el criterio de la segunda derivada para probar que esta función tiene un máximo relativo en $x = 1$ y su valor es $f(1) = 2$, y que tiene un mínimo relativo en $x = -1$ y su valor es $f(-1) = -2$. ¿Puedes concluir que f tiene un extremo relativo en $x = 0$?



Concavidad y puntos de inflexión. a) Una función f es **cóncava hacia arriba** en un intervalo si los segmentos que unen dos puntos cualesquiera de su gráfica están por **encima** de la gráfica.

b) Una función f es **cóncava hacia abajo** en un intervalo si los segmentos que unen dos puntos cualesquiera de su gráfica están por **debajo** de la gráfica.

c) En $x = c$ la función f tiene un **punto de inflexión** si cambia de concavidad en este punto.

Criterio de la segunda derivada para estudiar la concavidad de una función. Sea f una función derivable dos veces en el intervalo I.

a) Si $f''(x) > 0$ en I, f es cóncava hacia arriba en I.

b) Si $f''(x) < 0$ en I, f es cóncava hacia abajo en I.

Nota: Si en $x = c$ la función f tiene un punto de inflexión, y f puede derivarse dos veces, se ha de tener $f''(c) = 0$. Pero ¡cuidado! hay ocasiones en que $f''(c) = 0$ y $x = c$ NO es un punto de inflexión. Este es el caso, por ejemplo, de la función $f(x) = x^4$ en $x = 0$. Como $f''(x) = 12x^2$ se tiene que $f''(0) = 0$, pero $x = 0$ no es un puntode inflexión de esta función, sino un mínimo local, como puedes comprobar (estudia sus máximos y mínimos relativos y dibuja su gráfica.)

Ejemplo 11: Determina los intervalos de concavidad de la función $f(x) = \dfrac{6}{x^2 + 3}$, y sus puntos de inflexión.

S./ Calculamos sus dos primeras derivadas:

$$f'(x) = \frac{-12x}{(x^2+3)^2}, \qquad f''(x) = \frac{36(x^2-1)}{(x^2+3)^3}.$$

Las soluciones de $f''(x) = 0$ son $x = 1$ y $x = -1$.

Estudiando el signo de la segunda derivada se concluye: la función es cóncava hacia arriba en $(-\infty, -1)$, es cóncava hacia abajo en $(-1, 1)$ y vuelve a ser cóncava hacia arriba en $(1, \infty)$.

Con estos resultados se concluye que $(-1, f(-1)) = (-1, 6/4)$ y $(1, f(1)) = (1, 6/4)$ son los puntos de inflexión de la gráfica de esta función.

Representacion gráfica de funciones.

Como norma general, que podría tener excepciones, se pueden seguir los siguientes pasos cuando f tiene dos derivadas continuas.

1. Determina el dominio de definición de la función.
2. Halla los puntos de corte con los ejes: con el eje horizontal resolviendo $y = 0$; con el eje vertical poniendo $x = 0$.
3. Halla las asíntotas: verticales, horizontales y oblicuas.
4. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento hallando los puntos críticos y estudiando el signo de la primera derivada.
5. Halla los máximos y mínimos relativos con el criterio de la primera o de la segunda derivada.
6. Determina los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión estudiando el signo de la segunda derivada.
7. Si es necesario, halla algún punto adicional de la gráfica para esbozarla de manera más precisa.

Ejemplo 12: Practica con las siguientes funciones:

$$a) f(x) = \frac{2(x^2 - 9)}{x^2 - 4} \qquad b) f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$$

Problemas de optimización

Una de las aplicaciones más importantes de las derivadas es el cálculo de máximo y mínimo, tanto locales como absolutos. La naturaleza se guia en muchas ocasiones por reglas de máximos o mínimos. Con frecuencia se escuchan los términos mayor beneficio, menor coste, menor tamaño, menor distancia. Lo aprendido en esta sección nos ayuda a hallar estos valores.

En todos los casos es necesario entender el problema y buscar la función de la que debemos hallar su máximo o mínimo absoluto.

Practica con los siguientes ejemplos:

Ejemplo 13: Se desea fabricar un caja sin tapa en forma de paralelepípedo con base cuadrada y área lateral de 432 cm^2 ¿Qué dimensiones debe tener la caja de máximo volumen?

Ejemplo 14: Halla los puntos de la gráfica de $y = 4 - x^2$ que estén lo más cerca posible del punto $P = (0, 2)$.

El método de Newton.

El **método de Newton** es una técnica básica para aproximar las soluciones reales de una ecuación de la forma $f(x) = 0$, cuando la función f es derivable. Se comienza con una estimacion x_1. Se forma $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$. El proceso se repite para x_2 para obtener $x_3 = x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)}$. El proceso puede repetirse varias veces. En el paso n se tendría $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. (Observa que no puede ser cero $f'(x_n)$.) Si la sucesión $x_1, x_2, x_3, \ldots$ tiene como límite un número real c, entonces c es una solución de $f(x) = 0$.