Sección 1.4: La derivada y sus propiedades básicas. La Regla de la cadena.

El concepto de derivada aparece en muchas situaciones en la ciencias: en **matemáticas** es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto; en **física** mide la velocidad instantanea de un objeto; en **química** la velocidad con la que cambia la cantidad de una sustancia en una reacción; en **biología** el crecimiento instantaneo de una población de individuos.

Definición de derivada. La derivada de un función en un punto $x \in \mathbb{R}$, que se denota por $f'(x)$, es

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

cuando el límite exite. Se dice entonces que la función es derivable en el punto x.

El cociente $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ es la **tasa de variación media** de la función f en el intervalo $[x, x+h]$, y $f'(x)$ es la **velocidad instantanea**.

Notaciones para la derivada:

$$f'(x), \qquad \frac{df}{dx}, \qquad \frac{dy}{dx}, \qquad \frac{df(x)}{dx}, \qquad D_x f\,.$$

Primeros ejemplos.

- La derivada de un función constante $f(x) = c$ es $f'(x) = 0$.
- La derivada de una función lineal $f(x) = mx + b$ es $f'(x) = m$.
- La derivada de $f(x) = x^2$ es $f'(x) = 2x$.

Toda función derivable en un punto x es continua en ese punto. Sin embargo, hay funciones continuas en un punto que no son derivables en ese punto: por ejemplo, $f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$ pero no es derivable en este punto porque tiene forma de V.

Reglas de derivación.

- Derivada de una suma o diferencia de funciones: $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)\,.$
- Derivada de una constante por un función: $(cf(x))' = cf'(x)\,.$
- Derivada de un producto de dos funciones: $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,.$
- Derivada de un cociente de dos funciones:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}, \qquad \text{si } g(x) \neq 0\,.$$

Derivadas de algunas funciones sencillas.

- 1. $f(x) = x^n,\ n = 1, 2, 3, \ldots \quad \Rightarrow \quad f'(x) = nx^{n-1}$.
- 2. $f(x) = \ln x,\ x > 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1/x\,,\ x > 0$.
- 3. $f(x) = x^{-n},\ n = 1, 2, 3, \ldots \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -nx^{-n-1}$.
- 4. $f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^x$.
- 5. $f(x) = a^x,\ a > 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = (\ln a)a^x$.
- 6. $f(x) = x^a,\ a \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = ax^{a-1}$.
- 7. $f(x) = \log_a x,\ a > 0\,,\ x > 0 \ldots \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1/(x \ln a)\,,\ x > 0$.

Derivadas de algunas funciones trigonométricas y sus inversas.

- 8. $f(x) = \operatorname{sen} x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos x$.
- 9. $f(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\operatorname{sen} x$.
- 10. $f(x) = \operatorname{tg} x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1/\cos^2 x\,,$ si $\cos x \neq 0$
- 11. $f(x) = \operatorname{arcsen} x\,,\ -1 < x < 1, \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}\,,\ -1 < x < 1$.
- 12. $f(x) = \arccos x\,,\ -1 < x < 1, \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -1/\sqrt{1-x^2}\,,\ -1 < x < 1$.
- 13. $f(x) = \operatorname{arctg} x\,, \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1/(1+x^2)$.

Derivadas de algunas funciones hiperbólicas y sus inversas.

- 14. $f(x) = \operatorname{senh} x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cosh x$.
- 15. $f(x) = \cosh x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \operatorname{senh} x$.
- 16. $f(x) = \operatorname{tgh} x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1/\cosh^2 x$.
- 17. $f(x) = \operatorname{arcsenh} x\,, \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1/\sqrt{x^2+1}$.
- 18. $f(x) = \operatorname{arccosh} x\,,\ x \geq 1\,, \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1/\sqrt{x^2-1}\,,\ x > 1$.
- 19. $f(x) = \operatorname{arctgh} x\,,\ -1 < x < 1\,, \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1/(1-x^2)\,,\ -1 < x < 1$.

Ejemplo 1: La derivada de la función $f(x) = x^3 \ln x\,,\ x > 0$, se calcula usando la derivada de un producto de funciones:

$$f'(x) = (x^3)' \ln x + x^3 (\ln x)' = 3x^2 \ln x + x^3 \frac{1}{x} = x^2(1 + 3\ln x)\,.$$

Ejemplo 2: Calulamos $\frac{d}{dx}[(5x-2)/(x^2+1)]$ usando la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx}\Big(\frac{5x-2}{x^2+1}\Big) = \frac{(5x-2)'(x^2+1) - (5x-2)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{5(x^2+1) - (5x-2)2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{5x^2 + 5 - 10x^2 + 4x}{(x^2+1)^2} = \frac{-5x^2 + 4x + 5}{(x^2+1)^2}\,.$$

Ejemplo 3: Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^4 - 3x^2 + 5$ en el punto cuya ordenada es $x = 1$.

Solución: La pendiente es $m = f'(1)$. Como $f'(x) = 4x^3 - 6x$ se tiene $m = f'(1) = 4 - 6 = -2$. La recta tangente tiene por ecuación $y = -2x + b$ y pasa por el punto $(1, f(1)) = (1, 3)$. Entonces, $3 = -2(1) + b = -2 + b \Rightarrow b = 5$. La ecuación de la recta tangente es $y = -2x + 5$.

Derivadas sucesivas de una función

Si la derivada, $f'(x)$, de una función f puede derivarse, se obtiene la segunda derivada. De la misma manera se obtienen las derivadas sucesivas:

$$f'(x)\,, \qquad f''(x)\,, \qquad f^{(3)}(x)\,, \qquad f^{(4)}(x)\,, \quad \ldots\ldots\,, \quad f^{(n)}(x)\,.$$

$$\frac{df}{dx}\,, \qquad \frac{d^2f}{dx^2}\,, \qquad \frac{d^3f}{dx^3}\,, \quad \ldots\ldots\,, \quad \frac{d^nf}{dx^n}\,.$$

Ejemplo 4: Halla la segunda derivada de la función $f(x) = 1/(x^2 + 1),$.
Solución:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x}{x^4 + 2x^2 + 1}\,.$$

Ahora se deriva la función $f'(x)$ de nuevo usando la derivada de un cociente, para obtener:

$$f''(x) = \frac{-2(x^4 + 2x^2 + 1) - (-2x)(4x^3 + 4x)}{(x^2+1)^4} = \frac{6x^4 + 4x^2 - 2}{(x^2+1)^4}\,.$$

La regla de la cadena

Regla de la cadena: Si g es una función derivable en x y f es una función derivable en $g(x)$, la función composición $f(g(x))$ es derivable en x y su derivada es:

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Otra forma de escribir la regla de la cadena es las siguiente: escribimos $u = g(x)$ e $y = f(u)$. Entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Ejemplo 5: Usa la regla de la cadena para calcular la derivada de la función

$$f(x) = (5x^3 - 3)^8\,.$$

Solución: Sea $u = g(x) = 5x^3 - 3$ e $y = f(u) = u^8$. Se deduce:

$$\frac{dy}{du} = 8u^7\,; \qquad \frac{du}{dx} = 15x^2\,.$$

Usando la regla de la cadena se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 8u^7 \cdot 15x^2 = 8(5x^3 - 3)^7 \cdot 15x^2\,.$$

Ejemplo 6: Calcula la derivada de las siguientes funciones usando la regla de la cadena:

$$a) \quad y = \cos(x^3)\,, \qquad\qquad b) \quad y = \cos^3(x) = (\cos x)^3\,.$$

Solución: a) $y' = [-\mathrm{sen}\,(x^3)] \cdot (x^3)' = [-\mathrm{sen}\,(x^3)] \cdot (3x^2) = -3x^2 \cdot \mathrm{sen}\,(x^3)\,.$
b) $y' = [3(\cos x)^2] \cdot (\cos x)' = 3(\cos x)^2 \cdot [-\mathrm{sen}\, x] = -3(\cos x)^2 \mathrm{sen}\, x\,.$

Ejemplo 7: En algunos casos hay que usar la regla de la cadena más de una vez. porque la función puede estar definida por más de dos funciones encadenadas. Por ejemplo, para derivar la función $y = \ln(1 + (x^2 - 3)^5)$ aplicamos una vez la regla de la cadena:

$$y' = \frac{1}{1 + (x^3 - 3)^5} \cdot [1 + (x^3 - 3)^5]'\,.$$

Para hallar $[1 + (x^3 - 3)^5]'$ se usa de nuevo la regla de la cadena: $[1 + (x^3 - 3)^5]' = [0 + 5(x^2 - 3)^4] \cdot (x^2 - 3)' = 5(x^2 - 3)^4 \cdot 2x$. Sustituyendo en la expresion de y' obtenemos el resultado:

$$y' = \frac{10x(x^2 - 3)^4}{1 + (x^2 - 3)^5}\,.$$

Derivada de la inversa de una función.

La regla de la cadena permite calcular las derivadas de las funciones inversas. Si queremos calcular la derivada de $y = f^{-1}(x)$ escribimos $f(y) = x$ y derivamos con respecto a x usando la regla de la cadena para obtener $f'(y) \cdot y' = 1$. Por tanto, $y' = 1/f'(y)$.

Ejemplo 8: Vamos a hallar la derivada de la función $f(x) = \mathrm{arcsen}\, x$. Como $\mathrm{sen}\, f(x) = x$ usamos la regla de la cadena para obtener: $[\cos(f(x))] \cdot f'(x) = 1$. Como $\cos^2 f(x) + \mathrm{sen}^2 f(x) = 1$ se deduce $\cos f(x) = \sqrt{1 - \mathrm{sen}^2 f(x)} = \sqrt{1 - x^2}$. Por tanto,

$$f'(x) = \frac{1}{\cos f(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,,$$

que es la fórmula 11 de las reglas de derivación.

Ejemplo 9: Vamos a hallar la derivada de la función $f(x) = \mathrm{arctg}\, x$, con el mismo procedimiento anterior. Tenemos $\mathrm{tg}\, f(x) = x$ y usando la regla de la cadena se deduce: $[1/\cos^2 f(x)] \cdot f'(x) = 1$. Como $\cos^2 f(x) + \mathrm{sen}^2 f(x) = 1$ se deduce

$$\frac{\mathrm{sen}^2 f(x)}{\cos^2 f(x)} + 1 = \frac{1}{\cos^2 f(x)} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\cos^2 f(x)} = 1 + \mathrm{tg}^2 f(x) = 1 + x^2\,.$$

Entonces,

$$f'(x) = \cos^2 f(x) = \frac{1}{1 + x^2}\,,$$

que es la fórmula 13 de las reglas de derivación.

Intenta por tu cuenta la regla 12 sobre la derivada de la inversa del coseno y las reglas 17, 18 y 19 sobre las derivadas de las inversas de algunas funciones hiperbólicas.

Derivación implícita.

En algunos casos las funciones $y = f(x)$ están dadas **implícitamente** por una ecuación, como por ejemplo $xy = 1$ ó $x^2 - 2y^3 + 4y = 2$. Cuando una función está dada en forma implícita puede calcularse $y' = dy/dx$ usando la regla de la cadena.

EJEMPLO 10: Calcula $y' = dy/dx$ en la ecuación $x^2 - 2y^3 + 4y = 2$.
Solución: Derivamos la eucuación usando la regla de la cadena:

$$2x - 6y^2y' + 4y' = 0 \quad \Rightarrow \quad (-6y^2 + 4)y' = -2x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{2x}{6y^2 + 4}\,.$$