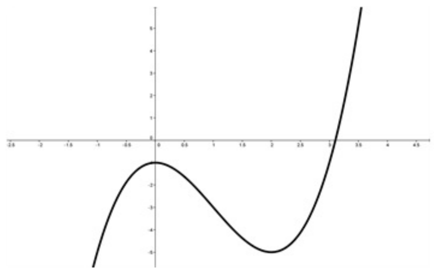
Sección 1.2: Funciones elementales. Representación gráfica.

Definición 1. Una función $f : A \to B$ es una ley o regla que asocia a cada elemento x de un conjunto A un **solo** elemento y del conjunto B. Escribimos $y = f(x)$.

- x se llama variable independiente.
- y se llama variable dependiente.
- A es el dominio de definición de f.
- El conjunto $f(B)$ de los valores que toma y es llama rango o recorrido de f.

Si $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida entre números reales su **gráfica** es el conjunto $(x, f(x))$ de puntos del plano cuando x recorre el conjunto A.



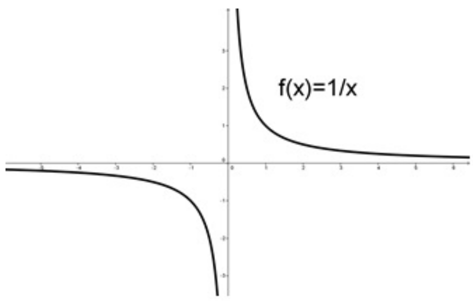
Funciones lineales: $y = mx + b$ donde m es la pendiente de la recta y b la ordenada en el origen.

Funciones polinómicas: Una función polinómica es una función de la forma

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

donde n es un número entero no negativo, $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales ($a_n \neq 0$). El mayor dominio posible es $\mathbb{R}$.

Funciones racionales: Una función racional es el cociente de dos funciones polinómicas $p(x)$ y $q(x)$, es decir, $f(x) = p(x)/q(x)$. Como no se puede dividir entre 0, para hallar el dominio de $f(x)$ hay que excluir los valores en los que $q(x) = 0$. Un ejemplo de función racional es $f(x) = 1/x \, (x \neq 0)$ cuya representación gráfica, que se muestra a la derecha, es una hiperbola equilátera.



Tipos básicos de transformaciones de $y = f(x)$ ($c > 0$).

$y = f(x - c)$: traslación horizontal a la derecha c unidades.
$y = f(x + c)$: traslación horizontal a la izquierda c unidades.
$y = f(x) + c$: traslación vertical hacia arriba c unidades.
$y = f(x) - c$: traslación vertical hacia abajo c unidades.
$y = -f(x)$: reflexión respecto al eje OX.
$y = f(-x)$: reflexión respecto al eje OY.
$y = -f(-x)$: reflexión respecto al origen.

Composición de funciones: Dadas dos funciones f y g con $Rec(g) \subset Dom(f)$, la función compuesta de f y g se define como $f \circ g(x) = f(g(x))$.

EJEMPLO: Si $f(x) = 3x - 1$ y $g(x) = \frac{2}{x-3}$, se tiene

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = 3g(x) - 1 = 3\frac{2}{x-3} - 1 = \frac{6}{x-3} - 1 = \frac{9-x}{x-3}$$

y su dominio de definición es $\mathbb{R} \setminus \{3\}$. Por otro lado

$$g \circ f(x) = \frac{2}{f(x) - 3} = \frac{2}{(3x-1) - 3} = \frac{2}{3x-4}$$

y su dominio de definición es $\mathbb{R} \setminus \{4/3\}$.

Función inversa: La inversa de una función f es otra función f^{-1} que satisface
a) $f(f^{-1})(x) = x$ para todo x en el Dom (f^{-1}) y b) $f^{-1}(f(x)) = x$ para todo x en el Dom (f)

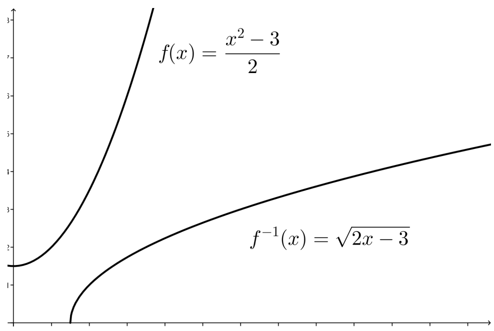
La gráfica de una función f y la de su función inversa f^{-1} son simétricas respecto a la recta $x = y$. No todas la funciones tienen inversa: para que una función tenga inversa en un intervalo debe satisfacer el test de la recta horizontal (cualquier recta horizontal corta a la gráfica de la función f como mucho en un solo punto). Se dice entonces que f es **inyectiva** en el intervalo.

Se tiene: Dom (f^{-1}) = Rec (f) y Rec (f^{-1}) = Dom (f).

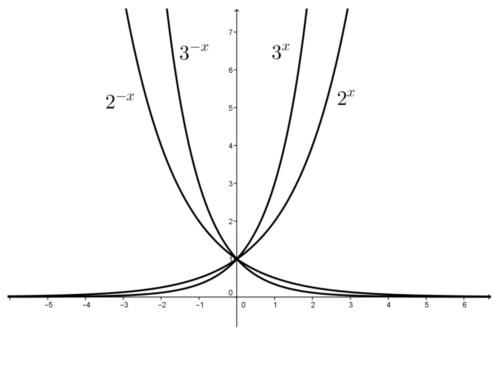
EJEMPLO: La función $f(x) = \frac{x^2+3}{2}$ es inyectiva en el intervalo $[0, \infty)$ y su recorrido es $[3/2, \infty)$. Su función inversa es $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x$. Por tanto,

$$\frac{y^2+3}{2} = x \Rightarrow y^2 = 2x - 3 \Rightarrow y = \sqrt{2x-3}.$$

Se ha elegido la raíz positiva porque Rec(f^{-1}) = Dom(f) = $[0, \infty)$ es de números positivos. Además Dom(f^{-1}) = Rec (f) = $[3/2, \infty)$.



Funciones exponenciales: Una función exponencial es de la forma $y = f(x) = ka^{rx}$, donde a es un número real positivo ($a \neq 1$), k y r son constantes y $k > 0$. Su dominio es $(-\infty, \infty)$ y su recorrido $(0, \infty)$. Una base muy usada para la función exponencial es el número $e \approx 2'718281$.....



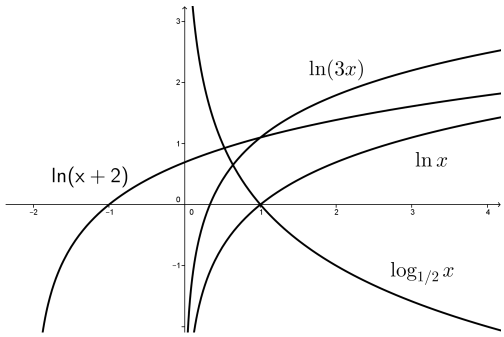
Propiedades de las potencias:

$$a^x a^y = a^{x+y} \ , \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \ , \qquad \frac{1}{a^x} = a^{-x} \ , \qquad (a^x)^y = a^{xy} \, .$$

Logaritmo en base a: Sean $a, x > 0$ números reales, con $a \neq 1$. El logaritmo en base a de x es un número real y que satisface

$$\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y .$$

Si $a = e$ escribimos $\log_e x = \ln x$ (logaritmo natural o neperiano) y si $a = 10$ se suele escribir $\log_{10} x = \log x$.



Las **funciones logarítmicas** son de la forma $y = f(x) = A + B \log_a x$, con $a > 0, a \neq 1$. Su dominio de definición es $(0, \infty)$ y su recorrido $(-\infty, \infty)$.

Propiedades de los logaritmos:

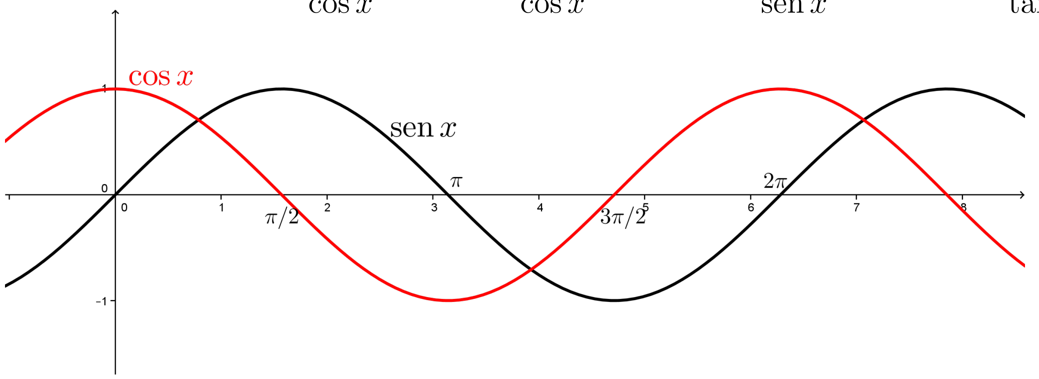
$$\mathbf{1)}\ a^{\log_a x} = x \quad , \qquad \mathbf{2)} \log_a a^x = x \ ,$$

$$\mathbf{3)} \log_a (xy) = \log_a x + \log_a y \quad , \qquad \mathbf{4)} \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \ ,$$

$$\mathbf{5)} \log_a x^y = y \log_a x \quad , \qquad \mathbf{6)} \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \, .$$

Funciones trigonométricas. Las funciones trigonométricas son:

$$\text{sen } x \ , \ \cos x \ , \ \tan x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} \ , \ \sec x = \frac{1}{\cos x} \ , \ \text{cosec } x = \frac{1}{\text{sen } x} \ , \ \text{cotan } x = \frac{1}{\tan x} \ .$$



Algunas funciones trigonométricas inversas.

Arco seno: $y = \text{sen } x$ es inyectiva en $[-\pi/2, \pi/2]$ y su recorrido es $[-1, 1]$. Su función inversa, $y = \text{arcsen } x \Leftrightarrow \text{sen } y = x$ tiene como dominio de definición $[-1, 1]$ y como recorrido $[-\pi/2, \pi/2]$.

Arco coseno: $y = \cos x$ es inyectiva en $[0, \pi]$ y su recorrido es $[-1, 1]$. Su función inversa, $y = \arccos x \Leftrightarrow \cos y = x$ tiene como dominio de definición $[-1, 1]$ y como recorrido $[0, \pi]$.

Arco tangente: $y = \tan x$ es inyectiva en $(-\pi/2, \pi/2)$ y su recorrido es $(-\infty, \infty)$. Su función inversa, $y = \arctan x \Leftrightarrow \tan y = x$ tiene como dominio de definición $(-\infty, \infty)$ y como recorrido $(-\pi/2, \pi/2)$.

Arco secante: $y = \sec x$ es inyectiva en $[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$ y su recorrido es $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. Su función inversa, $y = \text{arcsec } x \Leftrightarrow \sec y = x$ tiene como dominio de definición $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ y como recorrido $[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$.

Fórmulas trigonométricas.

$$\mathbf{1)}\ \cos^2 x + \mathrm{sen}^2 x = 1$$

$$\mathbf{2)}\ \mathrm{sen}\,(x+y) = \mathrm{sen}\,x\cos y + \cos x\,\mathrm{sen}\,y \qquad \mathbf{3)}\ \cos\,(x+y) = \cos x\cos y - \mathrm{sen}\,x\,\mathrm{sen}\,y$$

$$\mathbf{4)}\ \tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Fórmulas del ángulo doble:

$$\mathbf{5)}\ \cos(2x) = \cos^2 x - \mathrm{sen}^2 x \qquad \mathbf{6)}\ \mathrm{sen}\,(2x) = 2\,\mathrm{sen}\,x\cos x$$

Fórmulas del ángulo mitad:

$$\mathbf{7)}\ \cos^2(x/2) = \frac{1+\cos x}{2} \qquad \mathbf{8)}\ \mathrm{sen}^2(x/2) = \frac{1-\cos x}{2}$$

Funciones hiperbólicas. Las funciones hiperbólicas son:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,, \qquad \mathrm{senh}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,, \qquad \tanh x = \frac{\mathrm{senh} x}{\cosh x}$$

$$\mathrm{sech}\ x = \frac{1}{\cosh x}\,, \qquad \mathrm{cosech}\,x = \frac{1}{\mathrm{senh}\,x}\,, x \neq 0\,, \qquad \mathrm{cotanh}\,x = \frac{\cosh x}{\mathrm{senh}\,x}\,, x \neq 0\,.$$

Fórmulas con funciones hiperbólicas.

$$\mathbf{1)}\ \cosh^2 x - \mathrm{senh}^2 x = 1$$

$$\mathbf{2)}\ \cosh 2x = \cosh^2 x + \mathrm{senh}^2 x \qquad \mathbf{3)}\ \mathrm{senh}\,2x = 2\,(\mathrm{senh}\,x)(\cosh x)$$

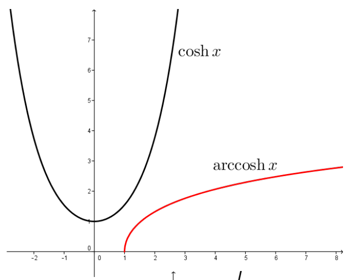
$$\mathbf{4)}\ \cosh^2(x/2) = \frac{1+\cosh x}{2} \qquad \mathbf{5)}\ \mathrm{senh}^2\,(x/2) = \frac{-1+\cosh x}{2}$$

Algunas funciones hiperbólicas inversas.

Arco coseno hiperbólico: $y = \cosh x$ es inyectiva en $[0,\infty)$ y su recorrido es $[1,\infty)$. Su función inversa,

$$y = \mathrm{arccosh}\,x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$$

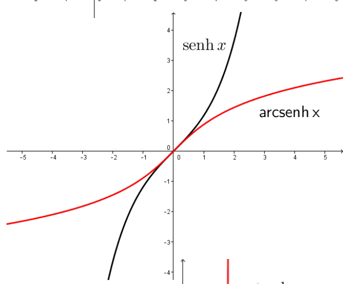
tiene como dominio de definición $[1,\infty)$ y como recorrido $[0,\infty)$.



Arco seno hiperbólico: $y = \mathrm{senh}\,x$ es inyectiva en $(-\infty,\infty)$ y su recorrido es $(-\infty,\infty)$. Su función inversa,

$$y = \mathrm{arcsenh}\,x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

tiene como dominio de definición $(-\infty,\infty)$ y como recorrido $(-\infty,\infty)$.



Arco tangente hiperbólica: $y = \tanh x$ es inyectiva en $(-\infty,\infty)$ y su recorrido es $(-1,1)$. Su función inversa,

$$y = \mathrm{arctanh}\,x = \frac{1}{2}\,\ln\frac{1+x}{1-x}$$

tiene como dominio de definición $(-1,1)$ y como recorrido $(-\infty,\infty)$.