## ÁLGEBRA LINEAL.
## ESPACIOS VECTORIALES. DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL.

**1.** Estudiar si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$.

- $A = \{(3x_2, x_2, x_4 + x_2, x_4) \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}$.
- $B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \ : \ x_1 \cdot x_2 = 0\}$.
- $C = \{(x_1, x_2, x_1, x_2) \ : \ x_1 = 1\}$.
- $D = \{(x_1, x_1, x_1, x_1) \ : \ x_1 \in \mathbb{R}\}$.
- $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \ : \ x_1 = t, \ x_2 = t, \ x_3 = 2t, \ x_4 = 5t \quad \text{con } t \in \mathbb{R}\}$.

**2.** Se considera el espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$.

1. ¿Se pueden expresar los vectores $(1, 2, 3)$, $(1, 1, 1)$ como combinación lineal del sistema $S = \{(1, 0, 1), (0, 2, 2)\}$?
2. Calcular $x$ e $y$, si es posible, para que el vector $(5, 7, x, y)$ sea combinación lineal de los vectores $(1, 2, 0, 2)$ y $(1, 1, 2, 3)$.

**3.** Estudiar si las siguientes familias de vectores del espacio vectorial real $\mathbb{R}^4$ son linealmente independientes.

- $S = \{(1, 2, 3, 0), (4, 3, 4, -16), (7, 3, 4, 5)\}$.
- $S = \{(1, 0, 0, -1), (2, 1, 1, -2), (0, 1, 1, 0), (1, -1, -1, -1)\}$.

**4.** Determina si son linealmente independientes los siguientes vectores de $\mathbb{R}^4$, y da una base del subespacio vectorial que generan:

$$\vec{u_1} = (1, 3, 0, -4) \ , \ \vec{u_2} = (-1, -5, 2, 6) \ , \ \vec{u_3} = (1, -2, 5, 1) \ .$$

**5.** Da una base del subespacio de $\mathbb{R}^4$ formado por las soluciones del sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{ll} x + 3y \qquad - 4t & = 0 \\ x + 5y - 2z - 6t & = 0 \\ x - 2y + 5z + t & = 0 \end{array} \right.$$

Calcula el rango de la matriz del sistema y la dimensión del subespacio que generan.

**6.** Estudia si las siguientes matrices son linealmente independientes en el espacio de matrices $2 \times 2$ con coeficientes reales:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**7.** ¿Para qué valores de $\lambda$ son los vectores $(\lambda, 1, 1)$, $(1, \lambda, 1)$, $(1, 1, \lambda)$ una base de $\mathbb{R}^3$?

**8.** Comprueba que $\{(1, 0, 1), (2, -2, 1), (3, 1, -1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y halla las coordenadas de $(-1, -2, 0)$.

**9.** Se considera el espacio vectorial real $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ formado por los polinomios (de coeficientes reales) de grado menor o igual que tres. Explica por qué $\{1, x, x^2, x^3\}$ es una base y por qué $\{1 + x^3, 1 + x + x^2, 1 - x^2 + x^3, 1 + x^2 + x^3\}$ no lo es.

**10.** Estudia si los dos conjuntos siguientes son subespacios del espacio $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ del ejercicio anterior:

$$W_1 = \{p(x) \in \mathbb{R}^{\leq 3}[x] \,:\, x - 1 \text{ divide } p(x)\} \quad \text{y} \quad W_2 = \{p(x) \in \mathbb{R}^{\leq 3}[x] \,:\, p(2) = 0\}.$$