Álgebra
Sistemas de ecuaciones lineales. Matrices.

1. Representar matricialmente y resolver por el método de Gauss-Jordan cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9 \\ 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 24 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 = 4 \\ 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ 5x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 9x_4 = 0 \end{cases}$$

2. Considerese el sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + 2z = a \\ x + z = b \\ 2x + y + 3z = c \end{cases}$$

Demostrar que para que este sistema sea compatible, a, b y c deben satisfacer $c = a + b$.

3. ¿Para qué valores de a no tiene soluciones el sistema que sigue? ¿Para qué valores tiene exactamente una solución? ¿Para qué valores tiene una infinidad de soluciones?

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z = a + 2 \end{cases}$$

4. En una feria de ganado un granjero compró pollos, cerdos y terneros. Por cada uno de ellos pagó 50, 1000 y 5000 pesetas, respectivamente. Sabiendo que compró animales de las tres clases, que compró 100 animales en total y que gastó 100000 pesetas en total, averiguar el número de animales que compró de cada clase.

5. Calcular las inversas de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

6. Sea A una matriz invertible tal que la inversa de $7A$ es $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$. Calcular la matriz A.

7. Calcular la inversa de las siguientes matrices, en el caso de que sean invertibles:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Encontrar las matrices que al multiplicarse por $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ realizan las siguientes acciones sobre A:

a) intercambia la primera y tercera filas,
b) multiplica la segunda fila por $1/3$,
c) sume el doble de la segunda fila a la primera.

9. Determinar los valores $\alpha \in \mathbf{C}$ y $\beta \in \mathbf{C}$ que hacen que la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{C})$ satisfaga la ecuacíon $A^2 + \alpha A + \beta I_2 = (0)$.

10. El producto de matrices cuadradas $n \times n$ no es conmutativo. Sin embargo, dada una matriz A, existen matrices B que conmutan con ella, es decir, tales que $A \cdot B = B \cdot A$ (por ejemplo, la identidad o la propia matriz A). El conjunto de tales matrices se llama *conmutador* de A. Calcular el conmutador de la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.