

APROXIMACION DE FUNCIONES. DESARROLLOS DE TAYLOR.

1. La medida de la circunferencia de un círculo es 56 cm con un posible error de $1,2 \text{ cm}$.
 - a) Aproxima el error y el porcentaje de error relativo al calcular el área del círculo.
 - b) Estima qué porcentaje de error relativo podría cometerse como máximo en la medida de una circunferencia de un círculo si al calcular el área se quiere tener un error relativo inferior al 3% . ¿Cuál sería el error permitido para una circunferencia de 56 cm ?
2. Determina el polinomio de Taylor de grado menor o igual que 4 centrado en $c = 0$ de las siguientes funciones:

$$a) f_1(x) = \frac{1}{x+1}, \quad b) f_2(x) = \sqrt{x+3}, \quad c) f_3(x) = \ln(x+1), \quad d) f_4(x) = x^2 \cos(x).$$

Dibuja las gráficas de $f_i(x)$ y de $P_{4,c}(x)$ para x entre -2 y 2 .

3. Halla una serie de potencias centrada en c para las siguientes funciones indicando el mayor intervalo abierto en el que convergen:

- a) $g_1(x) = \frac{3}{4-x}$ para $c = -2$.
- b) $g_2(x) = \frac{4x-7}{2x^2+3x-2}$ para $c = 0$.
- c) $g_3(x) = \frac{2}{1-x^2}$ para $c = 0$.
- d) $g_4(x) = \text{sen}^2(x)$ para $c = 0$.

4. Halla una serie de Taylor centrada en c para las siguientes funciones indicando su intervalo abierto de convergencia:

- a) $h_1(x) = e^{-2x}$ para $c = 0$.
- b) $h_2(x) = \text{sen}(x)$ para $c = \pi/4$.
- c) $h_3(x) = \ln(x^2 + 1)$ para $c = 0$.

5.

1. Construir la serie de potencias centrada en 0 de la función $f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x^2}$.
2. Representar f y el polinomio de Taylor $P_{8,c}$ para $c = 0$.
3. Completar la tabla siguiente, donde

$$F(x) = \int_0^x \frac{\ln(t^2 + 1)}{t^2} dt \quad , \quad G(x) = \int_0^x P_{8,0}(t) dt .$$

x	0.25	0.50	0.75	1.00	1.50	2.00
F(x)						
G(x)						

4. Describir la relación entre las gráficas de f y de $P_{8,0}$ y los resultados de la tabla del apartado anterior.

6. Halla los siguientes límites desarrollando en serie de potencias algunas de las funciones que aparecen en las correspondientes expresiones

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{1 - \cos x} \quad , \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)x}{1 - e^{-x^2}} \quad , \quad c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{\ln(1 + x^2)} \quad ,$$

7. La función error (muy usada en estadística y probabilidad) está definida por la integral:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Encuentra su desarrollo de Taylor.