

INTEGRACIÓN Y APLICACIONES.

1. Para la función $f(x) = \int_1^{x^2} \frac{1}{1+\operatorname{sen} t} dt$, $x \geq 1$, calcula $f'(x)$ en $x = \sqrt{\pi}$.

2. Para la función $f(x) = \int_{e^{-x}}^{\frac{1}{\ln t}} dt$, comprueba que $f'(x) = \frac{2 \operatorname{senh} x}{x}$.

3. Resuelve las siguientes integrales indefinidas haciendo cambios de variable:

$$\begin{aligned} a) \int \frac{\ln x}{x} dx, \quad & b) \int \sec^2 x e^{\tan x} dx, \quad & c) \int \frac{4x}{1-2x^2} dx \\ d) \int \sqrt{1-x^2} dx, \quad & e) \int \sqrt{1+x^2} dx, \quad & f) \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx. \end{aligned}$$

4. Resuelve las siguientes integrales indefinidas en las que intervienen funciones trigonométricas:

$$a) \int \operatorname{sen}^3 x dx, \quad b) \int \operatorname{sen}^4 x dx, \quad c) \int \sec x dx.$$

(NOTA: para resolver c) multiplica y divide por $\sec x + \tan x$.)

5. Resuelve las siguientes integrales indefinidas mediante la técnica de integración por partes:

$$a) \int x^2 e^{-x} dx, \quad b) \int x \ln x dx \quad c) \int \frac{x}{\cos^2 x} dx, \quad d) \int e^x \cos x dx.$$

6. Resuelve las siguientes integrales de funciones racionales:

$$\begin{aligned} a) \int \frac{4x}{(1-2x^2)^2} dx \quad & b) \int \frac{1}{x^2-2x-15} dx, \\ c) \int \frac{x^3-1}{x^2-x-2} dx \quad & d) \int \frac{1}{x^2+6x+10} dx. \end{aligned}$$

7. Resuelve las integrales definidas:

$$\begin{aligned} a) \int_0^\pi e^{-x} \operatorname{sen} x dx, \quad & b) \int_0^2 x \sqrt{2-x} dx, \quad & c) \int_e^{e^2} \frac{dx}{x(\ln x)^2}, \\ d) \int_0^3 f(x) dx \quad & \text{donde } f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 2 \\ x^2, & x > 2 \end{cases} \end{aligned}$$

8. Resuelve la ecuación:

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{\cos^2 t} dt = 1 \quad \text{para } x > 0$$

9. Considera las siguientes integrales impropias y resuelve las que sean convergentes.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2}, \quad \int_0^\infty x e^{-2x} dx, \quad \int_{-1}^1 \ln|x| dx, \quad \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$$

10. Calcula el área de la región comprendida entre las curvas dadas:

- a) $y = (x - 1)^2$ e $y = -x + 2$
- b) $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$ y el eje OX .
- c) $y = \sin x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ y el eje OX .
- d) $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$ e $y = 4$. en el primer cuadrante.

11. Calcula el valor medio de cada una de las funciones dadas en el intervalo dado:

- a) $f(x) = x^2 - 2$ en el intervalo $[0, 2]$.
- b) $\sin^2 x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

12. Calcula el volumen del sólido que se obtiene rotando la curva o región dada alrededor del eje OX :

- a) $y = \cos x$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$;
- b) $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 4$;
- c) $y = x^2$, $y = 4$.

13. Calcula la longitud del arco de curva dado entre los puntos indicados:

- a) $y = x^{3/2}/3$ entre los puntos $x = 0$ y $x = 5$.
- b) $y = 75(e^{x/150} + e^{-x/150})$ (catenaria) entre $x = -30$ y $x = 30$.

14. Halla el área de la superficie que se obtiene girando la curva dada alrededor del eje Ox :

- a) $y = x^3/3$ en $[0, 3]$;
- b) $y = \sqrt{x}$ en $[1, 4]$;
- c) $y = x/2$ en $[0, 6]$.

15. Calcula el tiempo requerido para enfriar un objeto de 300°F a 250°F evaluando

$$t = \frac{10}{\ln 2} \int_{250}^{300} \frac{1}{T - 100} dT$$

donde t es el tiempo en minutos

16. Dos productos químicos A y B se combinan a razón de 3 a 1 para formar un compuesto. La cantidad x de compuesto producida en el instante t es proporcional a las cantidades que quedan sin transformar de A y B en la solución. Si se mezclan 3 Kg de A con 2 Kg de B, se tiene

$$\frac{dx}{dt} = k \left(3 - \frac{3x}{4}\right) \left(2 - \frac{x}{4}\right)$$

Si en 10 minutos se ha formado 1 Kg de compuesto, calcular la cantidad formada en 20 minutos.

17. Un peso de masa m está sujeto al extremo de un muelle que oscila con movimiento armónico simple. Según la ley de Hooke se tiene que

$$\int \frac{dy}{\sqrt{A^2 - y^2}} = \int \sqrt{\frac{k}{m}} dt$$

donde A es el desplazamiento máximo, t el tiempo y k una constante. Expresar y en función de t , supuesto $y = 0$ en $t = 0$.