

DERIVADAS.

1. Halla a y b de forma que la función:

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 & , x \leq 2 \\ x^2 + b & , x > 2 \end{cases}$$

sea derivable en todos los puntos.

2. Usar las reglas de derivación para calcular las derivadas de las siguientes funciones a partir de las derivadas de las funciones elementales:

$$a) f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 3}, x \neq 3 \quad b) f(x) = e^{3x^2 - 1} \quad c) f(x) = \ln \frac{1}{x} (x > 0)$$

$$d) f(x) = (0, 2)^{3, 2x} \quad e) f(x) = (x^2 + 1)^{3, 2x} \quad f) f(x) = (\log x)^2$$

$$g) f(x) = \operatorname{sen}(x^2 - 1) \quad h) f(x) = [\cos(7x)]^3 \quad i) f(x) = \operatorname{tg}(3x - 2)$$

$$j) f(x) = \operatorname{arc} \cos(5x) \quad k) f(x) = \frac{e^{x^2} - 1}{e^x + 1} \quad l) f(x) = e^{2x} \ln(x^2 + 1)$$

3. Calcula las derivadas de las siguientes funciones de x :

$$\sqrt{5x + 3x^3}, \quad \frac{3x - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad \sqrt{x^2 + \sqrt{x + 1}}, \quad \frac{x + e^{-x^2}}{\ln^2 x}$$

$$\cos\left(\pi x - \frac{2}{\sqrt{1 + x^2}}\right), \quad \operatorname{tg}\left(\frac{x}{x + 1}\right), \quad \frac{a + b \operatorname{sen} x^2}{\sqrt{x^4 + c^4}}, \quad e^{x^2 - 2 \cos x}$$

4. Calcula la ecuación de la recta tangente a cada una de las siguientes curvas ¹ en el punto propuesto:

a) La bruja de Agnesi: $(x^2 + 4)y = 8$ en el punto $(2, 1)$.

b) La cisoide: $(4 - x)y^2 = x^3$ en el punto $(2, 2)$.

c) El bifolium: $(x^2 + y^2)^2 = 4x^2y$ en el punto $(1, 1)$.

d) El folium de Descartes: $x^3 + y^3 - 6xy = 0$ en el punto $(\frac{4}{3}, \frac{8}{3})$.

5. El gas de un globo esférico se escapa a razón de $1000 \text{ cm}^3/\text{min}$ cuando el radio es de 25 cm . ¿Con qué rapidez disminuye el radio? ¿Y el área de la superficie?

6. Halla la rapidez con la que cambia la distancia desde el origen a un punto que se mueve sobre la gráfica de la ecuación $y = x^2 + 1$ si dx/dt es $2 \text{ centímetros por segundo}$.

7. La arena sale de un contenedor a una velocidad de $10 \text{ metros cúbicos por minuto}$ formando un montón en forma de cono. El diámetro de la base del cono es aproximadamente el triple de su altura. ¿A qué velocidad cambia la altura del montón cuando éste tiene 5 metros ?

¹La representación gráfica de la curva la puedes ver en los ejercicios de la sección 2.5 del libro de texto.

8. Un avión vuela a una altura de 6 km y pasa directamente sobre una antena de radar. Cuando el avión está a 10 km del radar ($s = 10$), el radar detecta que la distancia s cambia a una velocidad de 240 kilómetros por hora. ¿Cual es la velocidad del avión?

9. Indica, razonadamente, si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

1. Si $f'(x) = g'(x)$, entonces $f(x) = g(x)$.

2. Si $f(x) = g(x) + c$, entonces $f'(x) = g'(x)$.

3. Si $y = \pi^2$, entonces $y' = 2\pi$.

4. Si $y = f(x)g(x)$, entonces $y' = f'(x)g'(x)$.

5. Si la velocidad de un objeto es constante, entonces su aceleración es 0.

6. Si $p(x) = (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4)$, entonces $p^{(5)}(x) = 0$.