

LÍMITES DE FUNCIONES. FUNCIONES CONTINUAS

1. Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 - x - 1} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}{x} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 16} \frac{4 - \sqrt{x}}{x - 16} \quad ,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1 - \tan x}{\sin x - \cos x} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 4x} \quad .$$

2. Halla el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

y utiliza este cálculo para obtener la aproximación $\cos x \sim 1 - \frac{1}{2}x^2$. Utilizando la calculadora, estima el valor $\cos(0'1)$ con cuatro cifras decimales y compara con la aproximación anterior.

3. Halla las asíntotas verticales de cada una de las funciones dadas y esboza el comportamiento de su gráfica cerca de las asíntotas halladas:

$$a) f(x) = \frac{1}{x^2 - 25} \quad , \quad b) g(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + x - 6} \quad .$$

4. Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{3x - 1} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^{10} - 1}{10x^{11} - 3} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2x - \frac{1}{x^2}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - x}} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \cos x}{x} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + 3})$$

5. Halla las asíntotas oblicuas de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = \frac{2x^2 - x}{x - 1} \quad b) g(x) = \frac{1 + 2x - 2x^2}{2x}$$

6. Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\ln(x+1)} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x \quad ,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sec x \quad ,$$

(Nota: para calcular estos límites tendrás que usar propiedades de las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas. Puedes hacer una gráfica de las funciones con algún programa para conjeturar cuál es el límite, pero luego debes probar tu conjetura.)

7. Halla los valores de las constantes a y b para que las funciones dadas sean continuas en toda la recta real:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \leq 2 \\ ax^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{4\sin x}{x} & \text{si } x < 0 \\ b - 2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

8. Usando el teorema de los valores intermedios prueba que el polinomio $x^3 - 3x - 1$ tiene tres raíces reales.

9. Demuestra que la ecuación polinómica $x^3 + x - 1 = 0$ tiene una solución en el intervalo $[0, 1]$.

10. Decide razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- Si $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ y $f(c) = L$, entonces f es continua en c .
- Para una función racional puede haber infinitos valores de x en los cuales no es continua.
- La función $f(x) = |x - 1|(x - 1)$ es continua en $(-\infty, \infty)$.
- La función $f(x) = |x - 1|/(x - 1)$ si $x \neq 1$ y $f(1) = 0$ es continua en $(-\infty, \infty)$.