

## 4. GEOMETRÍA // 4.4. POLIEDROS.

Eugenio Hernández

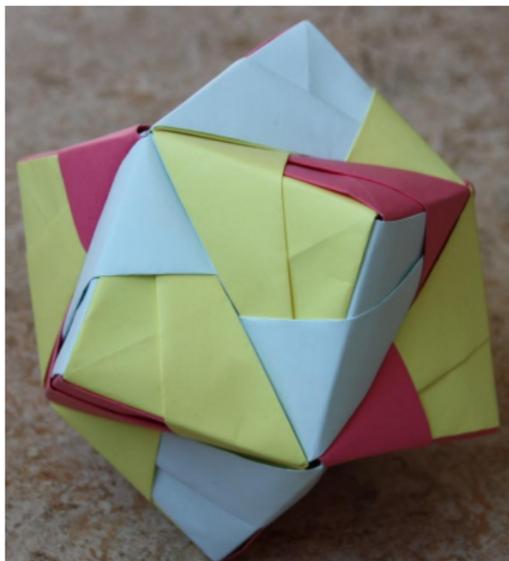
COMPLEMENTOS PARA LA FORMACIÓN DISCIPLINAR  
EN MATEMÁTICAS.

1. Alsina, C., Pérez, R., Ruiz, C., *Simetría dinámica*, Serie Matemáticas: Cultura y aprendizaje, Editorial Síntesis, 1989.
2. Garcia Gual, J., Sánchez Benito, M., *Viaje al mundo de los poliedros*, en Matemáticas para estimular el talento, A. Pérez Jiménez y M. Sánchez Benito (Coordinadores), Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES, (2009), pp.127-143.
3. Guillén Soler, G., *Poliedros*, Serie Matemáticas: Cultura y aprendizaje, Editorial Síntesis, 1991.
4. Holden, A., *Shapes, space and simmetry (with 319 illustrations)*, Editorial Dover, 1972.

1. Schattschneider, D., Walker, W., **M. C. Escher calidociclos**, Taschen Benedikt Ed., 2007: *Desarrollos planos para construir poliedros y anillos de tetraedros decorados con diseños de M. C. Escher*
2. **Polydron** (Preferiblemente piezas frameworks): *Piezas poligonales que encajan entre sí. En España lo distribuye la empresa Métodos y Sistemas.*
3. **Material plot**: *Formado por láminas de cartulina con polígonos troquelados y gomas elásticas para las uniones.*
4. **Web**: <http://poly-pro.softonic.com/>. *Programa que dibuja las familias de poliedros convexos cuyas caras son polígonos regulares, con sus desarrollos y mapas planos, y algunas de sus familias duales.*

## Materiales para construir poliedros con piezas de papel encajadas y sin pegar

1. Gurkewitz, R., Arnstein, B., *Multimodular Origami Polyhedra*, Dover Publications, 2003.
2. Simon, L., Arnstein, B., Gurkewitz, R., *Modular Origami Polyhedra*, Dover Publications, 2003.
2. Fusè, T., *Unit origami.*, Japan Publications, Inc., 1990.



## 4.4.1. Poliedros regulares.

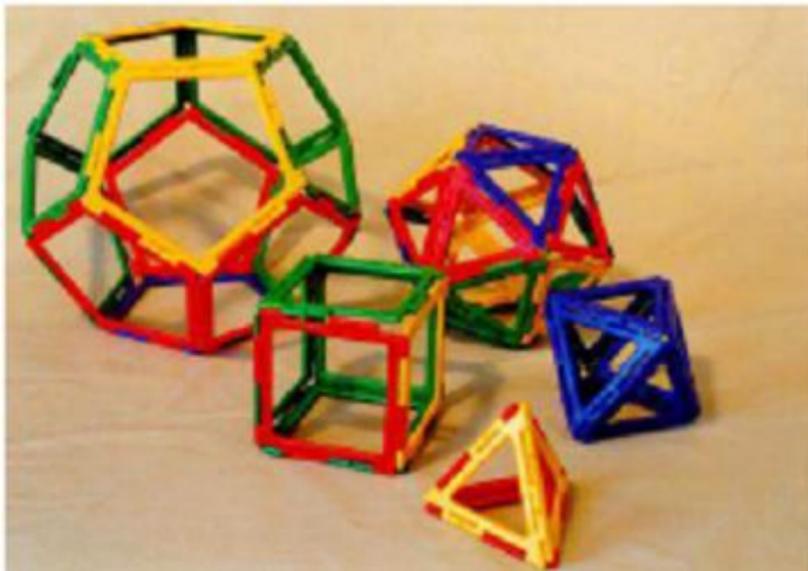
Un **poliedro** es un cuerpo delimitado por caras poligonales. Un **poliedro regular** es un poliedro en el que todas sus caras son *polígonos regulares iguales* y sus vértices son *iguales* en el sentido de que en cada uno de ellos confluye el mismo número de aristas congruentemente.

**¿Cuántos poliedros regulares conocemos?**  
**¿Cuántos poliedros regulares distintos existen?**

Los poliedros regulares son **convexos**, es decir, el segmento que une dos puntos cualesquiera del poliedro está totalmente contenido en él.

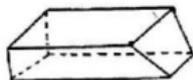
En un poliedro convexo la suma de los ángulos interiores de los polígonos que concluyen en un vértice, que llamaremos **la redondez en el vértice**, debe ser inferior a  $360^\circ$ .

**Ejercicio 1.** Haciendo un estudio de casos comprueba que solamente pueden existir cinco poliedros regulares.

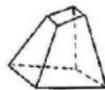


## 4.4.2. La fórmula de Euler para poliedros simples.

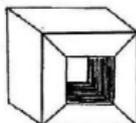
Con los poliedros regulares (ver página anterior) y con los poliedros mostrados en esta página rellena el cuadro de la página siguiente.



Paralelepípedo



Pirámide truncada



Cubo agujereado



Cubo-octaedro



Octaedro estrellado



Dodecaedro estrellado

Nombre del poliedro	CARAS C	VÉRTICES V	ARISTAS A	C+V-A
Tetraedro				
Octaedro				
Hexaedro o cubo				
Dodecaedro				
Icosaedro				
Paralelepípedo				
Pirámide truncada				
Cubo agujereado				
Cubo-octaedro				
Octaedro estrellado				
Dodecaedro estrellado				
Tetraedro truncado				

## ¿Que conjetura puede hacerse observando las columnas C+V y A?

Un poliedro se llama **simple** si no tiene agujeros. De otra manera, su superficie puede deformarse de manera *continua* en la superficie de una esfera.

## FÓRMULA DE EULER PARA POLIEDROS SIMPLES

En todo poliedro simple la suma del número de vértices y el número de caras coincide con el número de aristas más 2:

$$\text{CARAS} + \text{VÉRTICES} = \text{ARISTAS} + 2$$

$$C + V = A + 2$$

**D./** La figura de la página siguiente muestra las manipulaciones que hay que hacer al mapa plano de un poliedro simple de manera que la cantidad  $C + V - A$  permanezca constante.



### 4.4.3. Poliedros semirregulares.

Un poliedro es **semirregular** si todas sus caras son *polígonos regulares* (no necesariamente iguales) y sus vértices son *iguales* en el sentido de que en cada uno de ellos confluye el mismo número de aristas congruentemente.

Ya hemos estudiado el caso de todos los polígonos iguales (poliedros regulares), así que consideraremos solo el caso de dos o más polígonos regulares juntándose en un vértice.

$$\begin{aligned}k &= n^{\circ} \text{ de aristas en cada vértice} \\ &= n^{\circ} \text{ de polígonos en cada vértice}\end{aligned}$$

Como cada arista comparte dos vértices:

$$kV = 2A \tag{1}$$

**Ejercicio 2.** Prueba que no pueden confluir en un vértice 4 tipos de caras diferentes.

## I. DOS TIPOS DE CARAS DIFERENTES

$C_n$  = número de caras poligonales de  $n$  lados

$C_m$  = número de caras poligonales de  $m$  lados

$$3 \leq n < m$$

La fórmula de Euler se escribe:

$$C_n + C_m + V = A + 2 \quad (2)$$

$$nC_n + mC_m = 2A = kV \quad (3)$$

el número de  $n$ -polígonos y de  $m$ -polígonos;  $s$  puede no ser entero).

**Ejercicio 3.** Usar (1), (2) y (3) para demostrar la fórmula:

$$\frac{s+1}{ns+m} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A} \quad (4)$$

**Ejercicio 4.** Demostrar que en este caso (dos tipos de caras diferentes) se debe tener  $k = 3$ ,  $k = 4$  ó  $k = 5$ .

**Ejercicio 5.** Si  $k = 3$  usar la fórmula (4) para probar que se debe tener  $n = 3$ ,  $n = 4$  ó  $n = 5$ .

Haz un estudio por separado de cada uno de los siguientes casos:

I.1)  $k = 3$  y  $n = 3$

I.2)  $k = 3$  y  $n = 4$

I.3)  $k = 3$  y  $n = 5$

En el estudio de los casos anteriores va a ser necesario usar la siguiente

### PROPOSICIÓN

Si  $n$  es impar, el poliedro semirregular  $n - n - m$  no puede construirse.

**Ejercicio 6.** Si  $k = 4$  usar la fórmula (4) para probar que se debe tener  $n = 3$ .

Haz el estudio del caso:

$$1.4) k = 4 \text{ y } n = 3$$

**Ejercicio 7.** Si  $k = 5$  usar la fórmula (4) para probar que se debe tener  $n = 3$ .

Haz el estudio del caso:

$$1.5) k = 5 \text{ y } n = 3$$

## II. TRES TIPOS DE CARAS DIFERENTES

$C_n$  = número de caras poligonales de  $n$  lados

$C_m$  = número de caras poligonales de  $m$  lados

$C_p$  = número de caras poligonales de  $p$  lados

$$3 \leq n < m < p$$

**Ejercicio 8.** Demostrar que en este caso (tres tipos de caras diferentes) se debe tener  $k = 3$  ó  $k = 4$ .

**Ejercicio 9.** Probar que si  $k = 3$  y en cada vértice se juntan tres tipos de caras diferentes  $C_n$ ,  $C_m$  y  $C_p$ , con  $n < m < p$ , entonces se debe tener  $n = 3$  ó  $n = 4$ .

**Ejercicio 10.** En la misma situación que el ejercicio 9, prueba que el caso  $k = 3$  y  $n = 3$  es imposible.

**Ejercicio 11.** En la misma situación que el ejercicio 9, considera ahora el caso  $k = 3$  y  $n = 4$ . Prueba que se debe tener  $m = 6$  y  $p = 8$  ó  $p = 10$ .

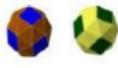
**Ejercicio 12.** En la misma situación que el ejercicio 9, considera ahora el caso  $k = 4$ . Prueba que se debe tener  $n = 3$ . Termina la búsqueda de poliedros semirregulares estudiando las posibilidades en este caso.

En el estudio anterior se deben haber obtenido:

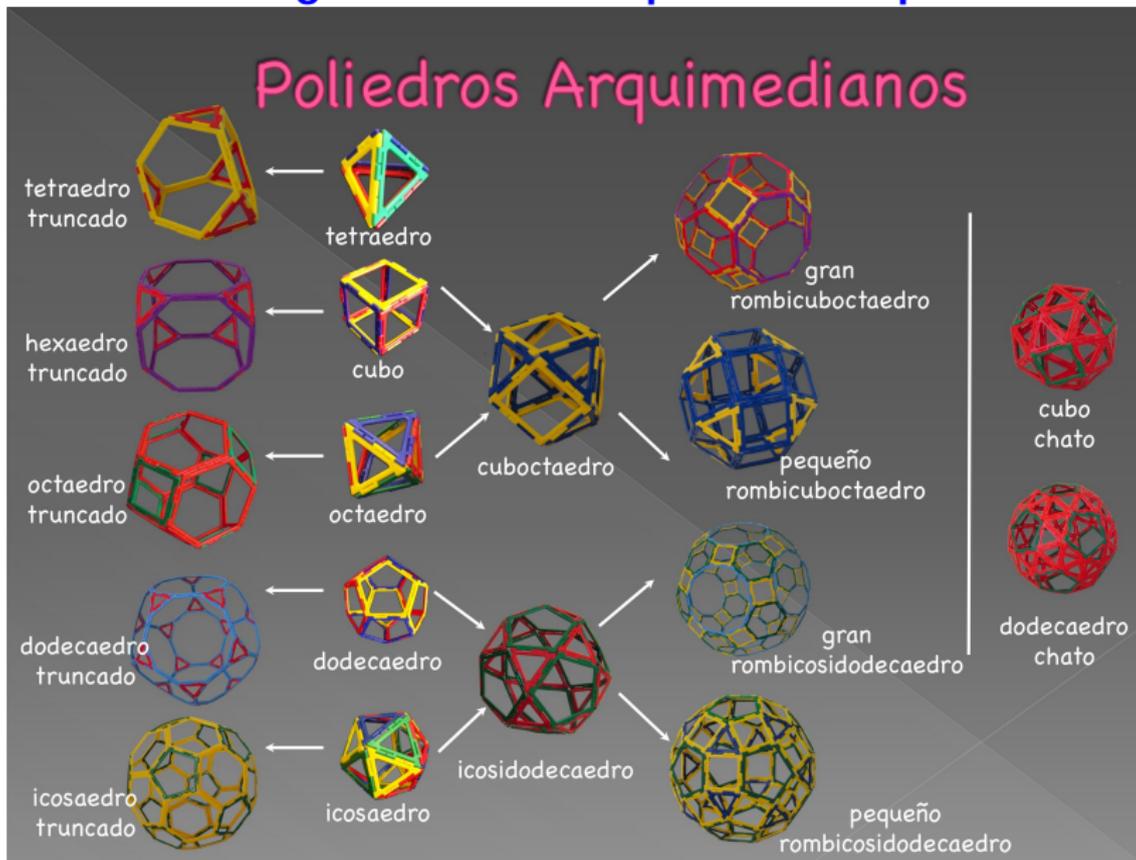
- A) Los 13 **sólidos de Arquímedes** de las dos próximas transparencias.
- B) La familia infinita de **prismas  $4 - 4 - n$**  que se obtienen cosiendo con cuadrados dos polígonos regulares de  $n$  lados (que son su cara superior e inferior).
- C) La familia infinita de **antiprismas  $3 - 3 - 3 - m$**  que se obtienen cosiendo con triángulos dos polígonos regulares de  $m$  lados, habiendo girado uno de ellos  $\pi/m$  grados.

## Los 13 sólidos de Arquímedes

Nombre	Imagen	Descripción
Tetraedro truncado		8 caras: 4 triángulos y 4 hexágonos
<i>Cuboctaedro</i>		14 caras: 8 triángulos y 6 cuadrados
Cubo truncado		14 caras: 8 triángulos y 6 octágonos
Octaedro truncado		14 caras: 6 cuadrados y 8 hexágonos
Rombicuboctaedro o pequeño rombicuboctaedro		26 caras: 18 cuadrados, 8 triángulos
Cuboctaedro truncado o gran rombicuboctaedro		26 caras: 12 cuadrados, 8 hexágonos, 6 octágonos

Nombre	Imagen	Descripción
<i>Icosidodecaedro</i>		32 caras: 20 triángulos, 12 pentágonos
Dodecaedro truncado		32 caras: 20 triángulos y 12 decágonos
Icosaedro truncado (balón de fútbol)		32 caras: 12 pentágonos y 20 hexágonos
Rombicosidodecaedro o pequeño rombicosidodecaedro		62 caras: 20 triángulos, 30 cuadrados, 12 pentágonos
Icosidodecaedro truncado, o gran rombicosidodecaedro		62 caras: 30 cuadrados, 20 hexágonos y 12 decágonos
Cubo snub, o cuboctaedro snub		38 caras: 32 triángulos y 6 cuadrados
Icosidodecaedro snub, o dodecaedro snub		92 caras: 80 triángulos y 12 pentágonos

# Generación de algunos sólidos Arquimedianos por truncación



La estructura vertical de un poliedro regular o semirregular puede usarse para determinar  $C =$  caras,  $V =$  vértices y  $A =$  aristas de cualquiera de estos poliedros, porque la fórmula de Euler  $C + V = A + 2$  puede convertirse en una ecuación con incógnita  $V$ .

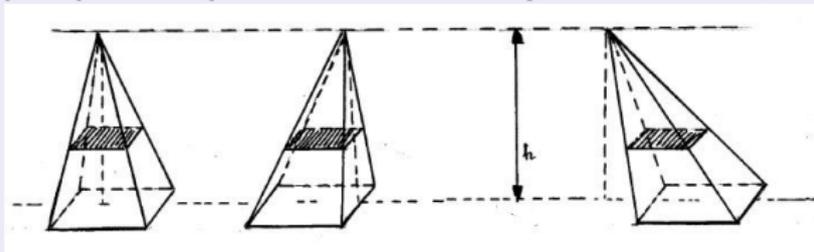
**Ejercicio 13.** Halla el número de caras, vértices y aristas del poliedro semirregular  $4 - 3 - 4 - 5$  (rombicosidodecaedro pequeño) indicado cuántas caras hay de cada tipo.

**Ejercicio 14.** Halla el número de caras, vértices y aristas del poliedro regular  $4 - 4 - 4$ .

## 4.4.4. Volúmenes.

### PRINCIPIO DE CAVALIERI

Dos sólidos que tienen secciones con la misma área al cortarlos por planos paralelos tienen igual volumen,



y este volumen se calcula haciendo las *sumas infinitas* de las áreas de todas las secciones:

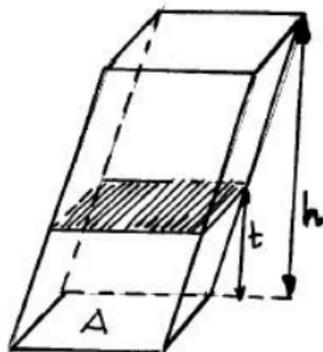
$$V = \int_0^h A(t) dt,$$

donde  $A(t)$  es el área de la sección a altura  $t$ .

Para un prisma con área de la base  $A$ , todas las secciones tienen la misma área,  $A(t) = A$ , y por tanto,

$$V = \int_0^h A dt = Ah.$$

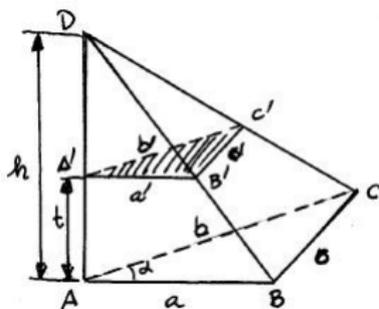
Es decir, el volumen de un prisma se calcula multiplicando el área de su base por la altura.



## VOLUMEN DE UNA PIRÁMIDE DE BASE TRIANGULAR

$$V = \frac{1}{3}(\text{Área de la base}) \times (\text{altura})$$

D/.

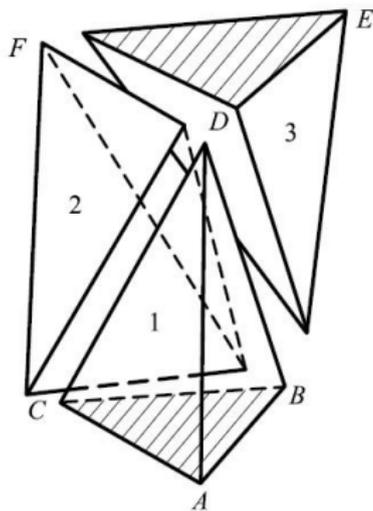
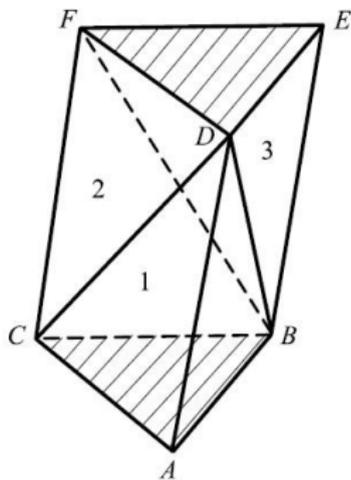


Con referencia a la figura, mostrar que el área  $A(t)$  del triángulo  $A'B'C'$  es

$$A(t) = A \frac{(h-t)^2}{h^2},$$

donde  $A$  es el área de la base, y a continuación calcular la integral.

D/.



Las pirámides 1 y 3 tienen igual volumen porque tienen igual base y altura. Las pirámides 2 y 3 también tienen igual volumen porque pueden interpretarse con vértice común en  $D$  y con bases los triángulos coplanarios iguales  $CFB$  y  $FBE$ . Luego las tres pirámides tienen igual volumen.

**NOTA:** La fórmula anterior es válida para una pirámide de base poligonal cualquiera. Basta dividir la base en triángulos y aplicar el resultado para cada una de las pirámides que se forman en su interior con base triangular.

**Ejercicio 15.** Demostrar que el volumen de un tetraedro regular cuyo lado tiene longitud  $\ell$  es

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12} \ell^3 .$$

**Ejercicio 16.** Demostrar que el volumen de un octaedro regular cuyo lado tiene longitud  $\ell$  es

$$V = \frac{\sqrt{2}}{3} \ell^3 .$$