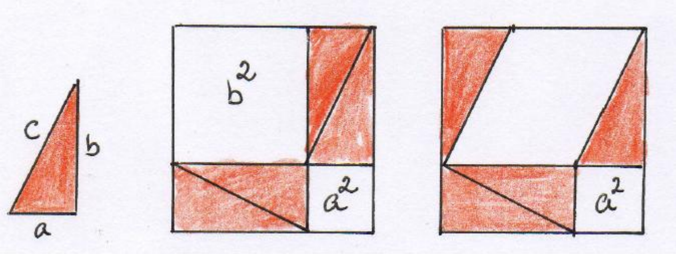
4. GEOMETRÍA // 4.3. PROPIEDADES DE LOS POLÍGONOS.

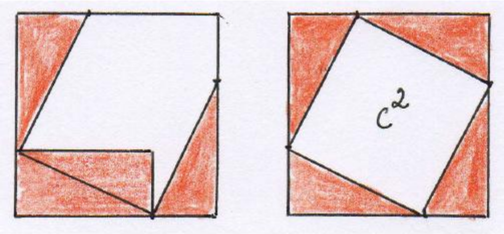
Eugenio Hernández

COMPLEMENTOS PARA LA FORMACIÓN DISCIPLINAR EN MATEMÁTICAS.

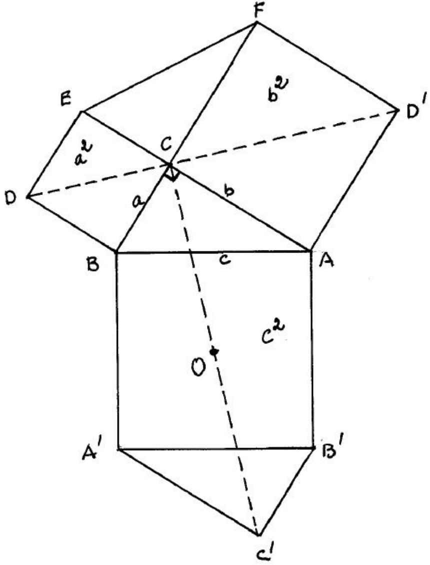
4.3.1. Dos nuevas demostraciones del teorema de Pitágoras.

La demostración china del teorema de Pitágoras





La demostración de Leonardo da Vinci (1452-1519) del teorema de Pitágoras



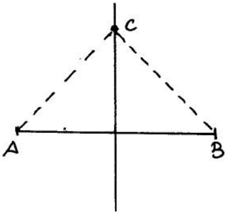
4.3.2. La geometría del triángulo.

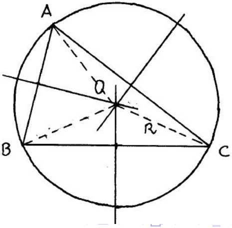
MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO

La mediatriz de un segmento AB es la recta perpendicular a AB que pasa por su punto medio. Todos los puntos de la mediatriz están a igual distancia de los extremos A y B del segmento.

CIRCUNCENTRO

Las tres mediatrices de los lados de un triángulo concurren en un punto O, llamado circuncentro, que es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.



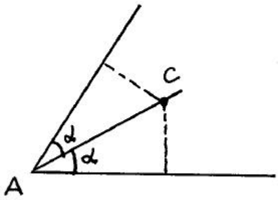


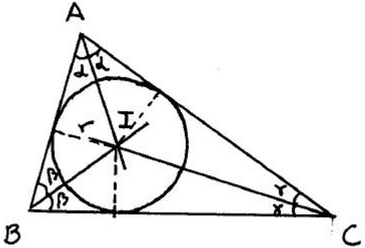
Bisectriz de un ángulo

La bisectriz de un ángulo es la semirrecta que divide al ángulo en dos ángulos iguales. Todos los puntos de la bisectriz están a igual distancia de los lados del ángulo.

Incentro

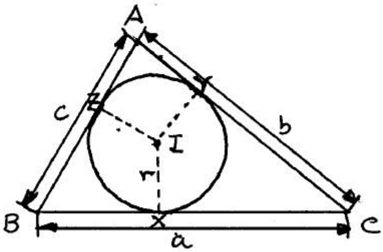
Las tres bisectrices de los ángulos de un triángulo concurren en un punto I, llamado incentro, que es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.





Ejercicio 1. Sean X, Y, Z los puntos en los que la circunferencia inscrita toca a los lados de un triángulo ABC. Si $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ es el semiperímetro del triángulo, demostrar que se cumple:

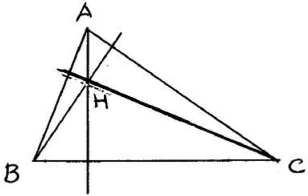
$$\overline{AZ} = \overline{AY} = s - a, \qquad \overline{BX} = \overline{BZ} = s - b, \qquad \overline{CX} = \overline{CY} = s - c\,.$$

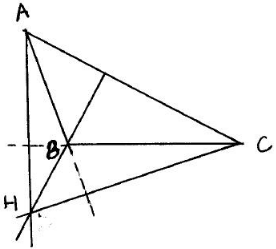


Ejercicio 2. Demostrar que el área de un triángulo es el producto del semiperímetro $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ por el radio de la circunferencia inscrita.

ALTURAS DE UN TRIÁNGULO

La alturas de un triángulo son las rectas trazadas desde cada vértice perpendicularmente al lado opuesto.



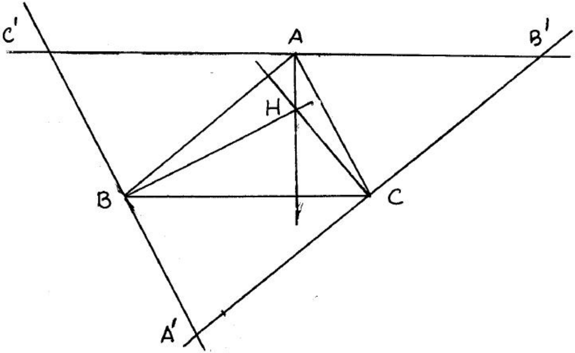


Es sorprendente que las tres alturas de un triángulo también concurran en un punto. Einstein confesaba su sorpresa antes este hecho y ante la ingeniosidad de su demostración.

ORTOCENTRO

Las tres alturas de un triángulo concurren en un punto H, llamado ortocentro.

D./



Las alturas del triángulo ABC son las mediatrices del triángulo $A'B'C'$. ■

Referencia: P. Puig Adam, Geometría métrica, Tomo I.

Medianas de un triángulo

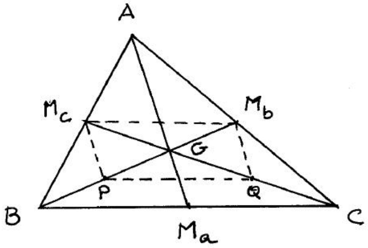
Las medianas son las rectas trazadas desde cada vértice que pasan por el punto medio del lado opuesto.

Baricentro o centro de gravedad de un triángulo

Las tres medianas de un triángulo ABC concurren en un punto G, llamado baricentro. Se cumple que

$$\overline{GM_a} = \frac{1}{3}\overline{AM_a}, \qquad \overline{GM_b} = \frac{1}{3}\overline{BM_b}, \qquad \overline{GM_c} = \frac{1}{3}\overline{CM_c}.$$

D./



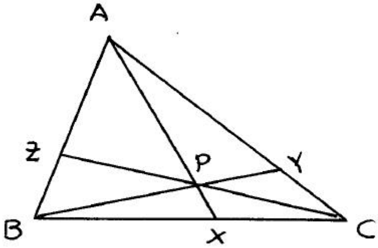
Ceviana de un triángulo

Una ceviana de un triángulo es cualquier segmento que une un vértice de un triángulo con cualquier punto de su lado opuesto.

Teorema de Ceva

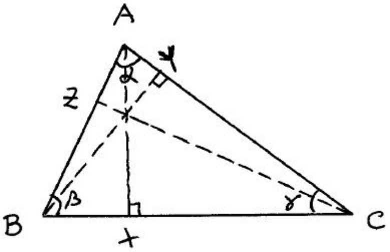
Sean AX, BY y CZ tres cevianas de un triángulo, una por cada vértice del triángulo ABC. Son equivalentes:

1. Las tres cevianas son concurrentes.
2. $\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \times \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \times \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = 1$



Ejercicio 3. Usar el teorema de Ceva para demostrar que las medianas de un triángulo son concurrentes.

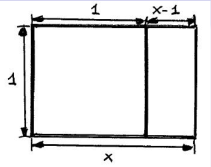
Ejercicio 4. Usar el teorema de Ceva para demostrar que las alturas de un triángulo acutángulo son concurrentes. (Indicación: Usar los cosenos de los ángulos α, β y γ de la figura)

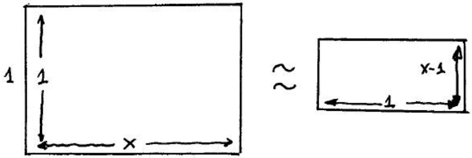


4.3.3. El pentágono regular y el número aureo .

El número aureo

El número aureo es la longitud de un rectángulo de altura 1 tal que al quitarle un cuadrado de lado 1 queda un rectángulo más pequeño congruente con el original.





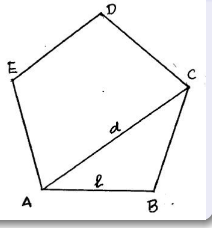
$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1} \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} .$$

El numero aureo es $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618\ldots$

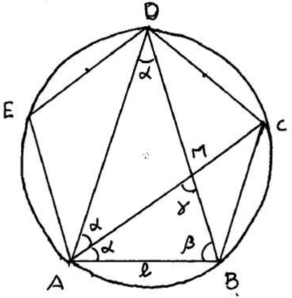
La diagonal de un pentágono regular

La relación entre la longitud, d,
de la diagonal de un pentágono regular y la longitud de su lado, ℓ, es el número aureo

$$\frac{d}{\ell} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,.$$



D/. Demostrar que los triángulos *ADB* y *ABM* son semejantes y usar el teorema de Thales.



Ejercicio 5. Prueba que $\sin 54^o = \cos 36^o = \Phi/2$ y $\sin 18^o = \cos 72^o = (\Phi - 1)/2$, donde Φ es el número aureo (Indicación: aprovechar el dibujo y los cálculos de la demostración anterior)

Construcción de polígonos regulares

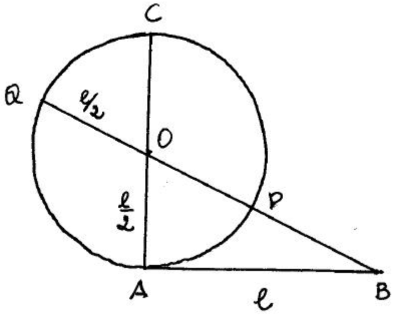
Una construcción clásica solo permite usar una regla sin marcar y un compás. Es fácil construir un triángulo equilátero y un cuadrado con regla y compás conocida la longitud de su lado.

El exágono regular puede construirse con regla y compás porque su lado coincide con el radio de la circunferencia circunscrita.

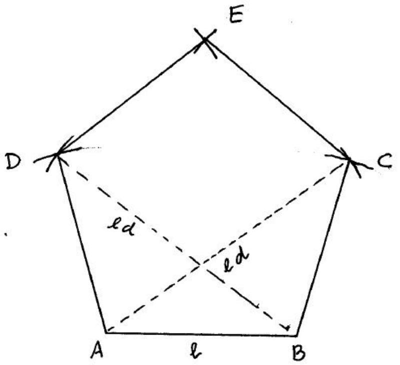
El pentágono regular puede construirse con regla y compás porque puede construirse el número aureo.

Sin embargo, el polígono regular de 7 lados no puede construirse con regla y compás. C. F. Gauss descubrió, cuando tenía 17 años, que el poligono regular de 17 lados puede construirse con regla y compás.

Ejercicio 6. Dado un segmento de longitud ℓ demuestra que el segmento BQ de la figura es la longitud de la diagonal del pentágono regular de lado ℓ, y que este segmento puede construirse con regla y compás.

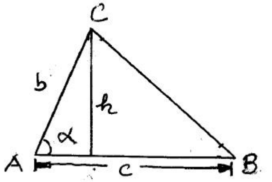


Construcción del pentágono regular



Dado el segmento AB de longitud ℓ en el ejercicio 6 se ha construido la diagonal, d, del pentágono que tiene ese lado. Con centro en A y en B y radios ℓ y d se trazan cuatro circunferencias obteniéndose los puntos de corte C y D. Con centro en C y en D se trazan circunferencias de radio ℓ, que permiten obtener el punto de corte E, vértice superior del pentágono.

4.3.4. Áreas de polígonos.

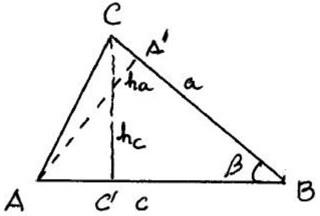


El área de un triángulo es

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}cb\sin\alpha$$

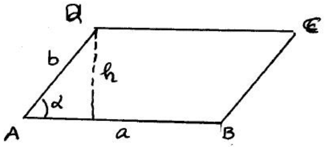
Si el triángulo es equilátero y llamamos ℓ a la longitud de cada uno de sus lados, su área es $\frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2$.

Ejercicio 7. Demostrar que el área de un triángulo es independiende de la base y la altura elegidas. (Indicación: Usar el teorema de Thales para probar que $\frac{1}{2}ch_c = \frac{1}{2}ah_a$ en el triángulo de la figura)



El área de un paralelogramo es

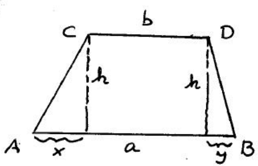
$$\text{Área}(ABCD) = ah = ab\sin\alpha$$



Si el paralelogramo es un cuadrado y llamamos ℓ a la longitud de cada uno de sus lados, su área es ℓ^2 . El área de un cuadrilátero cualquiera se puede calcular por triangulación.

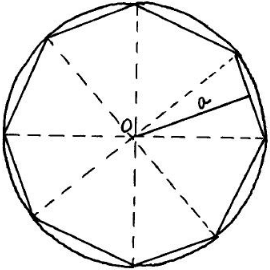
Ejercicio 8. Demostrar que el área de un trapecio cuyas longitudes de los lados paralelos son a y b y su altura h es

$$\text{Área}(ABCD) = \frac{a+b}{2}h\,.$$



Si un polígono es regular, de n lados, lo más fácil es descomponerlo en triángulos con vértice común en el centro del poligono. Si ℓ es la longitud del lado, demostrar que su área es:

$$\text{Área} = \frac{n\ell^2}{4\tan(\pi/n)}\,.$$



Ejercicio 9. Demostrar que el área de un pentágono regular cuyo lado tiene longitud ℓ es

$$\frac{5(1+\sqrt{5})}{4\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\,\ell^2 .$$

Ejercicio 10. Demostrar que el área de un exágono regular cuyo lado tiene longitud ℓ es

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}\,\ell^2 .$$

Fórmula de Herón

Si $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ es el semiperímetro de un triángulo cuyos lados miden a, b y c, se tiene

$$\text{Área}(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,.$$