4. Geometría // 4.1. El teorema de Thales y el teorema de Pitágoras.

Eugenio Hernández

COMPLEMENTOS PARA LA FORMACIÓN DISCIPLINAR EN MATEMÁTICAS.

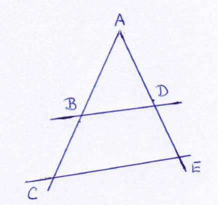
4.1.1. El teorema de Thales y consecuencias.

Thales de Mileto vivió hacia el 600aC y es considerado el "padre"de la Geometría. La demostración de Euclides está escrita en el libro VI de Los Elementos.

TEOREMA DE THALES

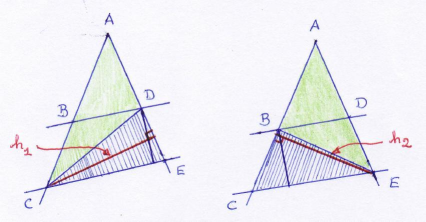
Si dos rectas concurrentes son cortadas por dos rectas paralelas, los segmentos que éstas determinan sobre aquellas son proporcionales: en la figura adjunta,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DE}}$$



Ver la interpretación musical del teorema de Thales por Les Luthiers en YouTube: Les Luthiers - El teorema de Thales.

D./ Los triángulos rayados"*CDE* y *CBE* tienen la misma área por tener igual base e igual altura, ya que las rectas *BD* y *CE* son paralelas. Entonces



$$\frac{\overline{DE} \times h_1}{2} = \frac{\overline{BC} \times h_2}{2}. \tag{1}$$

Los triángulos "verdes"*ACD* y *ABE* también tienen igual área. Por tanto

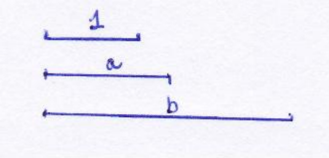
$$\frac{\overline{AD} \times h_1}{2} = \frac{\overline{AB} \times h_2}{2}. \tag{2}$$

El resultado se obtiene dividiendo la expresión (2) entre la (1).■

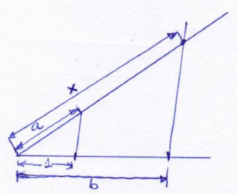
Ejercicio 1. Demostrar que también se cumple

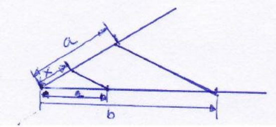
$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \quad \text{y} \quad \frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

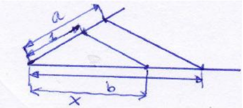
Ejercicio 2 (Multiplicar y dividir longitudes). Dados un segmento de longitud 1 y dos segmentos de longitudes a y b, usar el teorema de Thales para hallar geométricamente un segmento de longitud ab, otro de longitud a/b y otro de longitud b/a.



S./

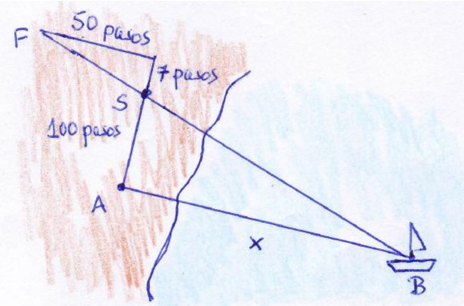






La página Web www.iesadpereda.net/thales/ contiene una descripción de como hacer calculadoras geométricas para sumar, restar, multiplicar, dividir y extraer raices cuadradas. Todas son aplicaciones del teorema de Thales.

Ejercicio 3 (Calcular las distancia de un observador terrestre a un barco en alta mar). Un observador en la costa situado en A quiere calcular la distancia a un barco en el mar, situado en B. Sabe que cada uno de sus pasos es de $70cm$.



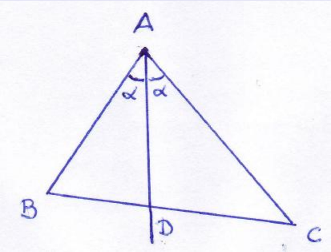
Sigue la estrategia siguiente: camina 100 pasos por la costa en dirección perpendicular a AB. Planta una bandera en el punto S. Sigue caminando 10 pasos en la mismo sentido. Después camina en dirección paralela a AB hacia el interior hasta llegar a un punto F alineado con S y B: en este último trayecto ha tenido que dar 50 pasos.

Usar el teorema de Thales para calcular la distancia del observador al barco.

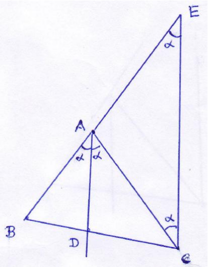
El teorema de la bisectriz

La bisectriz de un ángulo en un triángulo divide al lado opuesto en partes proporcionales a las longitudes de los otros lados del triángulo:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$



D./ Traza por C una paralela a la bisectriz AD hasta que corte en E a la continuación del lado AB del triángulo. Prueba que el triángulo ACE es isósceles. Usa a continuación el teorema de Thales para concluir el resultado. ■

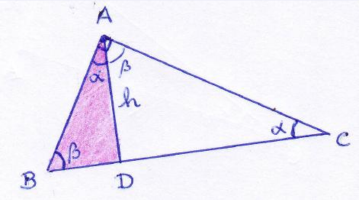


4.1.2. Triángulos rectángulos: el teorema de la altura, el teorema del cateto y el teorema de Pitágoras.

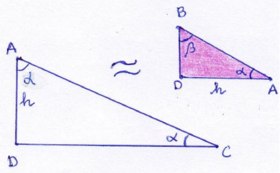
EL TEOREMA DE LA ALTURA

En un triángulo rectángulo, la altura sobre la hipotenusa es media proporcional entre los dos segmentos en que la divide:

$$h^2 = \overline{BD} \times \overline{DC} \Leftrightarrow \frac{\overline{BD}}{h} = \frac{h}{\overline{DC}}$$

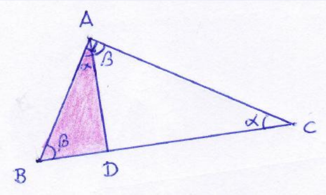


D./ Prueba que los triángulos *ACD* y *BDA* son semejantes y a continuación usa el teorema de Thales. ■



El teorema del cateto

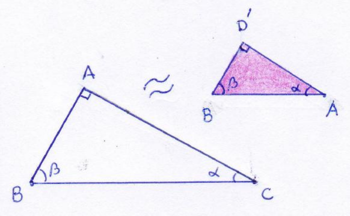
En un triángulo rectángulo, cada cateto es media proporcional entre la hipotenusa y la proyección del cateto sobre esta:



$$\overline{AB}^2 = \overline{BC} \times \overline{BD}$$

(y también $\overline{AC}^2 = \overline{BC} \times \overline{DC}$)

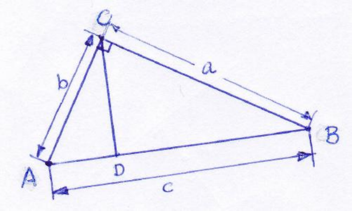
D./ Halla el punto D' simétrico de D respecto al segmento AB. Prueba que los triángulos ABC y $D'BA$ son semejantes y utilizar el teorema de Thales. ■



El teorema del Pitágoras

En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de cada uno de los catetos:

$$c^2 = a^2 + b^2$$



D./ Por el teorema del cateto aplicado a los triángulos rectángulos *ADC* y *CDB* se tiene

$$b^2 = c \times \overline{AD} \quad \text{y} \quad a^2 = c \times \overline{DB}\,.$$

Entonces,

$$a^2 + b^2 = c \times \overline{AD} + c \times \overline{DB} = c \times (\overline{DB} + \overline{AD}) = c^2\,. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 4. (El teorema del coseno) En cualquier triángulo cuyas longitudes de sus lados sean a, b y c se cumple

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

donde γ es el ángulo en el vértice opuesto al lado de longitud c.