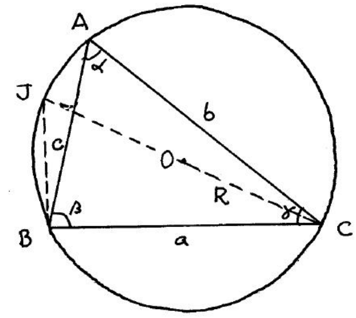
Máster de Formación de profesorado de Secundaria Obligatoria y Bachillerato.
Curso 2014-15

COMPLEMENTOS PARA LA FORMACIÓN DISCIPLINAR EN MATEMÁTICAS

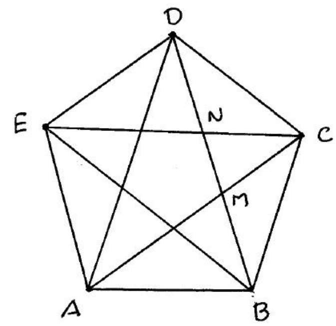
HOJA DE PROBLEMAS: GEOMETRÍA II
(Para entregar el 12 de febrero de 2015)



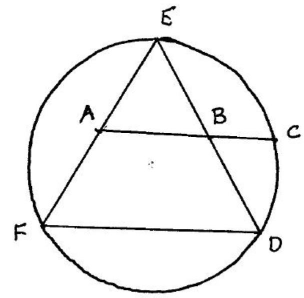
1. (Ley del seno) Para un triángulo ABC inscrito en una circunferencia de radio R se tiene
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R\,.$$
(Indicación: trazar el diámetro CJ y la cuerda BJ como en la figura)

2. Demostrar que para cualquier triángulo ABC se tiene Área$(ABC) = \frac{abc}{4R}$, donde R es el radio de la circunferencia circunscrita y a, b y c son las longitudes de sus lados. (Usar la ley del seno)

3. Demostrar que las medianas de un triángulo dividen a éste en seis triángulos todos de igual área.



4. En la estrella de cinco puntas que se forma al unir las diagonales de un pentágono regular, demostrar que
$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DM}} = \frac{\overline{DM}}{\overline{DN}} = \frac{\overline{DN}}{\overline{NM}} = \phi\,.$$



5. Sean A y B los puntos medios de los lados EF y ED de un triángulo equilátero DEF inscrito en una circunferencia. Extiende AB hasta cortar a la circunferencia en C. Demostrar que B divide a AC según el número de oro, es decir
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \phi\,.$$
Sugerencia: Prolongar el segmento AB hacia la izquierda hasta cortar a la circunferencia en un punto C'.Demostrar que los triángulos $C'EB$ y DBC son semejantes.

6. Demostrar que el área de un octógono regular cuya lado tiene longitud ℓ es:
$$2(\sqrt{2}+1)\ell^2\,.$$

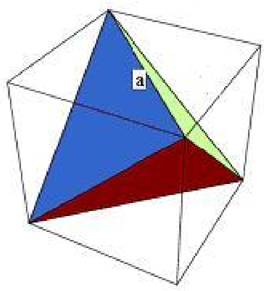
7. A partir de la estructura verticial dada halla en cada uno de los siguientes casos el número de caras de cada tipo del poliedro considerado, el número de vértices y el de aristas:

   a) Cuboctaedro truncado (ecuación verticial: $4-6-8$).

   b) Icosidodecaedro (ecuación verticial: $3-5-3-5$).

   c) Icosidodecaedro truncado (ecuación verticial: $4-6-10$).

8. Un tetraedro regular cuya arista tiene longitud a se coloca dentro de un cubo como en la figura, dejando vacío un espacio ocupado por cuatro tetraedros. Utiliza este puzle para hallar el volumen del tetraedro regular en función de la longitud a de su lado.



9. Demuestra que el volumen de un octaedro regular de lado ℓ es $\dfrac{\sqrt{2}}{3}\ell^3$.

10. En todo poliedro regular exite un único punto, llamado **centro**, que equidista de todas sus caras, y que es el centro de la esfera inscrita en el poliedro regular. La longitud del radio de esta esfera se llama **apotema** del poliedro. Todo poliedro regular se puede descomponer en unión disjunta de pirámides iguales cuya altura es la apotema.

    Sabiendo que la apotema de un icosaedro regular cuyas aristas tienen logitud ℓ es $a = \frac{\ell}{2}\frac{\Phi^2}{\sqrt{3}}$, prueba que el volumen de un icosaedro regular es $V = \frac{5}{6}\Phi^2\ell^3$.