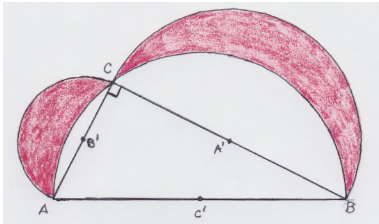
Máster de Formación de profesorado de Secundaria Obligatoria y Bachillerato.
Curso 2014-15

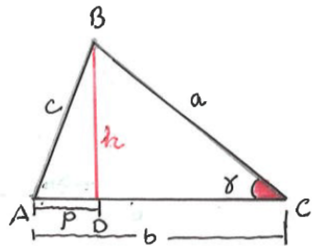
Complementos para la formación disciplinar en Matemáticas

HOJA DE PROBLEMAS: Geometría I
(Para entregar el 5 de febrero de 2015)

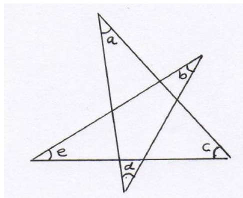
1. En un triángulo rectángulo ABC, con ángulo recto en C, trazar las semicircunferencias de centros el punto medio de cada lado y cuyo diámetro es el lado correspondiente. Demostrar que la suma de las áreas de las lúnulas que se forman (las zonas coloreadas de la figura) es igual al área del triángulo ABC. (Sugerencia: usar el Teorema de Pitágoras.)



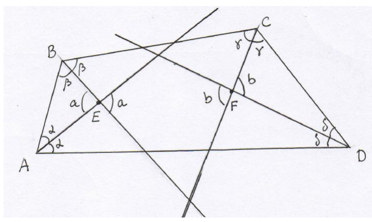
2. (1,5 puntos) Demostrar el Teorema del coseno: en cualquier triángulo ABC como en la figura, se cumple
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$
(Sugerencia: Aplicar el Teorema de Pitágoras a los triángulos rectángulos ABD y BCD.)



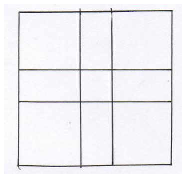
3. Hallar la suma de los ángulos interiores de una estrella de cinco puntas usando un argumento visual similar al de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.



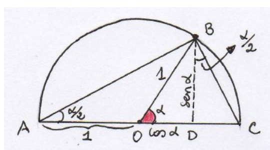
4. Considerar un cuadrilátero convexo en el que las bisectrices de sus cuatro ángulos forman un nuevo cuadrilátero. Demostrar que este nuevo cuadrilátero la suma de los ángulos interiores de vértices opuestos es 180º (en la figura $a + b = 180$º)



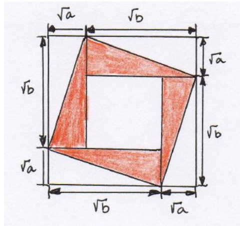
5. Utiliza la figura de la derecha para demostrar visualmente la fórmula
$$F_{n+1}^2 = 4F_{n-1}^2 + 4F_{n-1}F_{n-2} + F_{n-2}^2$$
donde los F_n son los números de la sucesión de Fibonacci.



6. Usar la figura de la derecha para ilustrar las fórmulas de la tangente del ángulo mitad:
$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

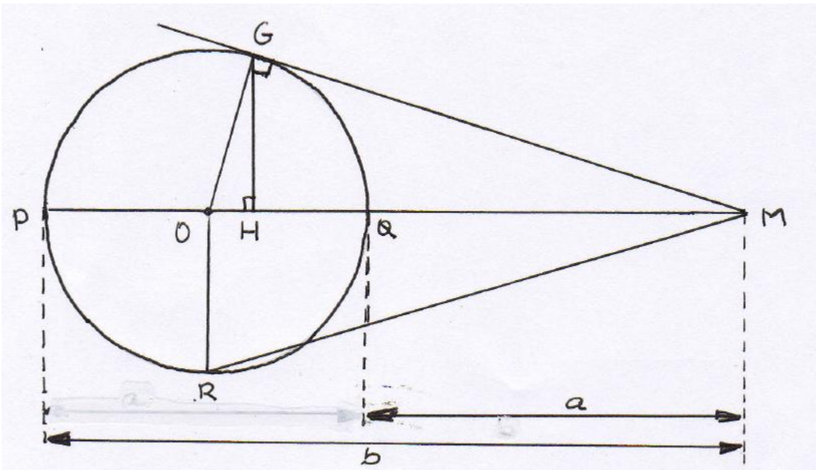


7. Usar la figura de la derecha para demostrar que la media geométrica $M_G = \sqrt{ab}$ de dos números $a, b > 0$ no supera a su media aritmética $M_A = \frac{a+b}{2}$.



8. (1,5 puntos) Dados $a, b > 0$ su media armónica es $M_H = \frac{2ab}{a+b}$ y su media cuadrática $M_C = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. Con la figura que hay a continuación demuestra las desigualdades:

$$M_H \leq M_G \leq M_A \leq M_C$$



9. Prueba el "teorema de Pitágoras inverso": si a y b son las longitudes de los catetos y h la altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo, se tiene

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2}.$$