Sección 1.3: Límites de funciones. Funciones continuas.

Idea intuitiva de límite. El límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a c es L (se escribe $\lim_{x\to c} f(x) = L$) si cuando x toma valores cercanos a c (sin llegar a tomar el valor c), los valores de $f(x)$ se acercan a L.

Definición precisa de límite - A. L. Cauchy. $\lim_{x\to c} f(x) = L$ si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - c| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \epsilon$.

Límite lateral por la derecha. $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$ si cuando x toma valores cercanos a c, pero siempre mayores que c, los valores de $f(x)$ se acercan a L.

Límite lateral por la izquierda. $\lim_{x\to c^-} f(x) = L$ si cuando x toma valores cercanos a c, pero siempre menores que c, los valores de $f(x)$ se acercan a L.

Propiedades de los límites.

Sea b una constante, $\lim_{x\to c} f(x) = L$ y $\lim_{x\to c} g(x) = K$

- Límite de una constante por una función: $\lim_{x\to c} bf(x) = bL$
- Límite de una suma o diferencia: $\lim_{x\to c}[f(x) \pm g(x)] = L \pm K$.
- Límite de un producto: $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = LK$.
- Límite de un cociente: $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{K}$, cuando $K \neq 0$.
- Límite de una potencia: $\lim_{x\to c}[f(x)]^n = L^n, \quad n = 1, 2, 3, 4, ...$

Cálculo de límites: Si es posible, lo primero que se debe hacer es sustituir el valor de x por c. En muchas ocasiones, las que dan los límites más interesantes, se obtienen **indeterminaciones:**

$$\frac{0}{0}, \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \qquad (\pm\infty)\cdot 0, \qquad 1^{\infty}, \quad 0^0, \qquad (\pm\infty)^0, \qquad \infty - \infty\,.$$

La técnica de cancelación: Cancelar la parte común del numerador y del denominador de una fracción, cuando sea posible.
Ejemplo:

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^2 + x - 6}{x + 3} = \lim_{x\to -3} \frac{(x+3)(x-2)}{x+3} = \lim_{x\to -3}(x - 2) = -5$$

La técnica de racionalización: Para calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x},$$

en donde al sustituir x por 0 se obtiene la indeterminación $0/0$, se multiplican numerador y denominador por $\sqrt{x+1}+1$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sqrt{x+1}+1)}=\frac{1}{2}\,.$$

El teorema del encaje: Si $h(x)\le f(x)\le g(x)$ para todo x en un intervalo que contiene a c, excepto quizá en c, y se tiene $\lim\limits_{x\to c}h(x)=L=\lim\limits_{x\to c}g(x)$, entonces

$$\lim_{x\to c}f(x)=L.$$

El teorema del encaje es la herramienta que se usa para obtener el límite siguiente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=1.$$

Este límite es esencial para calcular otros límites en los que aparecen funciones trigonométricas. EJEMPLOS:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen}^2(x/2)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x/2)}{x/2}\cdot(\operatorname{sen}(x/2))=1\cdot 0=0.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}3x}{3x}\cdot\frac{3}{\cos 3x}=1\cdot\frac{3}{1}=3.$$

Límites infinitos. Asíntotas verticales. La gráfica de una función $y=f(x)$ tiene como asíntota vertical la recta $x=c$ si se cumple alguna de las siguientes situaciones:

$$\lim_{x\to c^+}f(x)=+\infty,\qquad \lim_{x\to c^-}f(x)=+\infty,\qquad \lim_{x\to c^-}f(x)=-\infty,\qquad \lim_{x\to c^+}f(x)=-\infty.$$

EJEMPLO: Comprueba que la gráfica de la función $f(x)=\frac{x^2+2x-8}{x^2-4}$ tiene como asíntota vertical $x=-2$, pero que la recta $x=2$ no es asíntota vertical a pesar de que en $x=2$ se anula el denominador de la función.

Límites en el infinito. Asíntotas horizontales. La gráfica de una función $y=f(x)$ tiene como asíntota horizontal la recta $y=L$ si se cumple alguna de las siguientes situaciones:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=L,\qquad \lim_{x\to-\infty}f(x)=L$$

Casos básicos. Cuando r es un número real positivo

$$a)\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^r}=0\qquad b)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^r}=0,\qquad c)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^r}{e^x}=0,\qquad d)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{e^x}=0.$$

Para cualquier número real s, si x^s está definida cuando $x<0$, se tiene

$$e)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^s}=0.$$

EJEMPLO: Para calcular $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-4}{x^3+1}$ se dividen numerador y denominador entre x^3 y se utiliza el caso básico a) para obtener

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-4}{x^3+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{4}{x^3}}{1+\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-0}{1+0}=2.$$

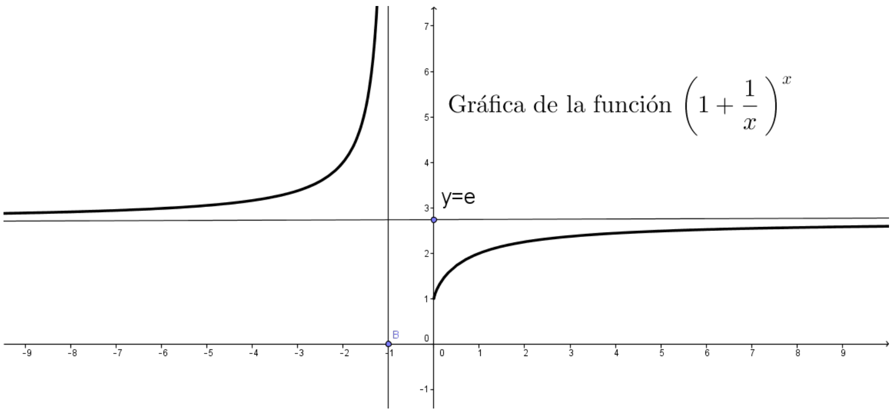
Ejemplo: Para calcular $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x+x^2}{e^{3x}-\ln x}$ se dividen numerador y denominador entre e^{3x} y se utilizan el caso básico c) y d) para obtener

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x+x^2}{e^{3x}-\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-2x}-\frac{x^2}{e^{3x}}}{1-\frac{\ln x}{e^{3x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{0+0}{1-0} = 0.$$

Ejemplo: Comprueba que las asíntotas horizontales de la función $f(x) = \frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}$ son $y = 3/\sqrt{2}$ en $+\infty$ e $y = -3/\sqrt{2}$ en $-\infty$.

Un límite especial: el número $e = 2,718281828....$:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \qquad \lim_{x\to-\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$



Ejemplo:

$$\lim_{x\to\infty} 6\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{2x} = 6\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{5x}\right]^{2/5} = 6\left[\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{2/5} = 6e^{2/5}.$$

Asíntotas oblicuas: La recta $y = mx + b$ con $m \neq 0$ es una asíntota oblicua de la gráfica de $y = f(x)$ si se cumple alguna de las condiciones siguientes:

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (mx+b)] = 0\,, \qquad \text{o} \qquad \lim_{x\to-\infty} [f(x) - (mx+b)] = 0.$$

Los valores de m y b se calculan con las fórmulas siguientes:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}\,, \qquad b = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx].$$

Observa que hay que estudiar las asíntotas en $+\infty$ y en $-\infty$.

Ejemplo: Para las asíntotas oblicuas en $+\infty$ de la gráfica de la función $f(x) = \frac{xe^x}{2+e^x}$ se calculan:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{xe^x}{2+e^x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2+e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{2}{e^x}+1} = 1,$$

y

$$b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{xe^x}{2+e^x} - x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x}{2+e^x} = 0.$$

Luego la recta $y = x$ es una asíntota oblicua de la gráfica de la función en $+\infty$. Para estudiar las asíntotas oblicuas en $-\infty$ hay que calcular:

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{xe^x}{2+e^x}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{2+e^x} = 0.$$

Luego no hay asíntota oblicua en $-\infty$. (Comprueba que tiene como asíntota horizontal $y = 0$.)

Función continua. a) Una función $f(x)$ es continua en el punto $x = c$ si $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.
b) Una función $f(x)$ es continua en un intervalo (a, b) si $f(x)$ es continua en todos los puntos del intervalo (a, b) :

Ejemplo: La función $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x - 2}$ no está definida en $x = 2$, pero como

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x^2 + 1) = 5\,,$$

si se define $f(2) = 5$ la función es continua. En este caso se dice que la discontinuidad de la funcion f es **evitable**.

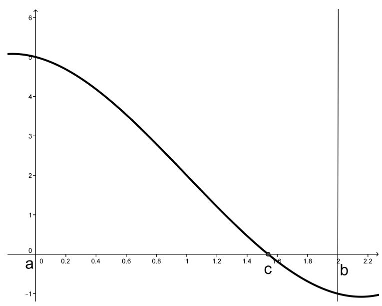
Ejemplo: Para que la función $f(x) = \frac{3 \text{ sen } 2x}{x}$ si $x < 0$ y $f(x) = a - x$ si $x \geq 0$ sea continua en toda la recta real, debe ser continua en $x = 0$. Calculando los límites por la izquerda y por la derecha en $x = 0$, comprueba que esto sucede si $a = 6$.

Propiedades de las funciones continuas.

Sean f y g dos funciones continuas en $x = c$ y b un número real.

- bf es una función continua en $x = c$.
- $f \pm g$ es una función continua en $x = c$.
- $f \cdot g$ es una función continua en $x = c$.
- f/g es una función continua en $x = c$ si $g(c) \neq 0$.

Teorema de Bolzano. Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ tal que $f(a)$ y $f(b)$ tienen distinto signo. Entonces, existe un punto c en el intervalo abierto (a, b) tal que $f(c) = 0$.



Teorema de los valores intermedios. Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y sea k un número entre $f(a)$ y $f(b)$. Entonces, existe un punto c en el intervalo abierto (a, b) tal que $f(c) = k$.

Nota: El teorema de Bolzano puede usarse para hallar aproximaciones de las soluciones de una ecuación de la forma $f(x) = 0$ cuando f es continua, mediante el método de dividir un intervalo en el que se encuentra una raíz en partes iguales.