Sección 1.1: Los números complejos. Raices de polinomios

La **unidad imaginaria** i se define como $i = \sqrt{-1}$. Por tanto $i^2 = -1$.

Un **número complejo** es de la forma $z = a + bi$, donde a y b son números reales. El número real a se llama **parte real** de z y el número real b se llama **parte imaginaria** de z.

La **suma** de dos números complejos se hace sumando sus partes reales y sus partes imaginarias.
Ejemplo: $(2 + 3i) + (5 - 4i) = (2 + 5) + (3 - 4)i = 7 - i$

Dos números complejos se **multiplican** como si fueran expresiones algebraicas, teniendo en cuenta que $i^2 = -1$.
Ejemplo: $(2 + 3i)(5 - 4i) = 10 - 8i + 15i - 12i^2 = 10 + 7i - 12(-1) = 22 + 7i$.

El **conjugado** de un número complejo $z = a + bi$ es $\overline{z} = a - bi$ (se cambia de signo la parte imaginaria). Se tiene $z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$.

Para **dividir** dos números complejos se multiplican el numerador y el denominador por el conjugado del denominador.
Ejemplo: $\frac{1+2i}{1+i} = \frac{(1+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i+2i-2i^2}{1+1} = \frac{3+i}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$.

El **módulo** del número complejo z es $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$. El **argumento** del número complejo z es el ángulo α que forma el segmento que une el origen con z con la direccion positiva del eje real, medido en el sentido positivo (contrario al giro de las agujas de un reloj). El argumento α del número complejo $z = a + bi$ satisface $tg\,\alpha = b/a$.
Ejemplo: El módulo del número complejo $z = -2 + 2i$ es $|z| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ y el argumento es un ángulo α que satisface $tg\,\alpha = 2/(-2) = -1$. La calculadora daría $tan^{-1}(-1) = -\pi/4$, pero como el numero complejo z está en el segundo cuadrante su argumento es $\frac{-\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$.

La expresión $|z|(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$ se llama **forma trigonométrica** del número complejo z. Usando la fórmula de Euler $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha$ podemos escribir $z = |z|e^{i\alpha}$, que se llama **forma polar** del número commplejo z.

La forma polar es muy útil para multiplicar y dividir números complejos.
Para multiplicar:

$$(r_1 e^{i\alpha_1})(r_2 e^{i\alpha_2}) = r_1 r_2 e^{i\alpha_1} e^{i\alpha_2} = r_1 r_2 e^{i(\alpha_1+\alpha_2)},$$

por lo que se multiplican los módulos y se suman los argumentos.
Para dividir:

$$\frac{r_1 e^{i\alpha_1}}{r_2 e^{i\alpha_2}} = \frac{r_1}{r_2}\frac{e^{i\alpha_1}}{e^{i\alpha_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\alpha_1-\alpha_2)},$$

por lo que se dividen los módulos y se restan los argumentos.

Si n es un número natural, la **potencia n-ésima** del número complejo $z = re^{i\alpha}$, dado en forma polar, es $z^n = r^n e^{in\alpha}$ (esto se deduce de la regla anterior de multiplicación de dos número complejos en forma polar).

Dado el número complejo $w = s(\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta)$ se dice que el número complejo z es una **raíz n-ésima** de w si se cumple: $z^n = w$. El número complejo w tiene n raices n-ésimas distintas que se calculan con la fórmula:

$$z_k = \sqrt[n]{s}\Big[\cos(\frac{\beta}{n} + \frac{2\pi k}{n}) + i \operatorname{sen}\big(\frac{\beta}{n} + \frac{2\pi k}{n})\Big], \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Ejemplo: Comprueba con la fórmula anterior que las raices cuartas de $w = 1$ son $z_0 = 1, z_1 = i, z_2 = -1, z_3 = -i$.

Un **polinomio con coeficientes complejos** en la variable x es una expresión de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\,,$$

donde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son números complejos. Una raiz del polinomio $P(x)$ es cualquier número complejo z que satisfaga $P(z) = 0$, es decir z es solución de la ecuación algebraica $P(x) = 0$.

Ejemplo: El polinomio $P(x) = x^3 - i$ tiene como raiz $z = -i$ porque

$$P(-i) = (-i)^3 - i = -i^3 - i = -(-i) - i = i - i = 0.$$

También $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$ es raiz de $P(x)$ porque

$$P(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = P(e^{i\pi/6}) = (e^{i\pi/6})^3 - i = e^{i\pi/2} - i = i - i = 0.$$

Teorema fundamental del álgebra (C. F. Gauss). Todo polinomio de grado n con coeficientes complejos, de la forma

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\,,$$

tiene n raices complejas $z_1, z_2, \ldots, z_n$ (algunas pueden repetirse) y se puede escribir como

$$P(x) = (x - z_1)(x - z_2)\ldots(x - z_n)\,.$$

Ejemplo: Las raices cuartas de $w = 1$ son $z_0 = 1, z_1 = i, z_2 = -1, z_3 = -i$. Por tanto, estas son las raices del polinomio $P(x) = x^4 - 1$. Se puede escribir

$$x^4 - 1 = (x-1)(x-i)(x+1)(x+i).$$

Raices enteras de polinomios con coeficientes enteros: Si la ecuación

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

con coeficientes enteros posee una solución M que sea un número entero, M debe ser divisor de a_0.

Ejemplo: Las posibles soluciones enteras de la ecuacion $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 = 0$ son divisores de -2, es decir: $1, -1, 2, -2$. Se tiene que $P(1) = -4, P(-1) = 0, P(2) = 0, P(-2) = 16$. Por tanto $z = -1$ y $z = 2$ son soluciones enteras de la ecuación. Comprueba que las otras dos soluciones son complejas: i y $-i$.