Matemáticas. Grado en Química
Ejercicios - Curso 2013-14 Hoja 2.2

Derivación de funciones de varias variables. Regla de la cadena. Gradiente.

1. Considera la fórmula $p = n\frac{RT}{V}$, que satisfacen los gases ideales, donde n y R son constantes. Calcula las derivadas parciales:

$$\frac{\partial p}{\partial T} \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial V} \; .$$

2. Comprueba que para un gas ideal se cumple la regla cíclica de derivación parcial:

$$\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial V} = -1$$

3. El coeficiente de dilatación térmica a presión constante se define por $\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)$, y la compresibilidad isoterma por $\beta = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)$. Calcula α y β para un gas ideal y para un gas que siga la ecuación de estado de van der Waals: $(p + \frac{an^2}{V^2})(V - nb) = nRT$.

4. Considera la **ecuación de Laplace**:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

Prueba que las siguientes funciones satisfacen la ecuación diferencial anterior:

$$z = 5xy \quad , \quad z = e^x \sin y \quad , \quad z = \arctan\frac{y}{x} \quad , \quad z = \mathrm{sh}(y)\sin(x) \quad .$$

5. Considera la **ecuación de ondas**[1]:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

Prueba que las siguientes funciones satisfacen la ecuación diferencial anterior:

$$z = \sin(x - ct) \quad , \quad z = \sin(\omega ct)\sin(\omega x) \quad , \quad z(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x-ct) + f(x+ct)\right) \quad .$$

6. Considera la **ecuación del calor**:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = c^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

Prueba que las siguientes funciones satisfacen la ecuación diferencial anterior:

$$z = e^{-t}\cos\frac{x}{c} \quad , \quad z = e^{-t}\sin\frac{x}{c} \quad .$$

[1] Esta ecuación describe vibraciones transversales de cuerdas elásticas (por ejemplo, las de los instrumentos musicales).

7. Considera las **ecuaciones de Cauchy-Riemann**:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Prueba que éstas se escriben en coordenadas polares en la forma

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

Verifica el resultado para las funciones $u = \ln\sqrt{x^2+y^2} \quad , \quad v = \arctan\frac{y}{x} \quad .$

8. Calcula $\dfrac{dz}{dt}$ para $z = \sqrt{x^2+y^2}$, donde $x = \cos t,\ y = e^t$, y evalua el resultado en $t = 0$.

9. Calcula $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ para $z = x^2 - y^2$, donde $x = s\cos t,\ y = s\sin t$, y evalua el resultado en $s = 3, t = \pi/4$.

10. Mediante derivación implícita, calcula $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ en los casos siguientes:

a) $x^2 + 2yz + z^2 = 1$ *b*) $x + \sin(y+z) = 0$.

11. Considera la función $h(x,y) = x\tan(y)$. Calcula su gradiente y el valor máximo de la derivada direccional en el punto $P = (2, \pi/4)$.

12. Calcula la distancia mínima del punto $(5,0,0)$ a la superficie $z = x^2 + y^2$.

13. Un escalador trepa por la ladera de una montaña cuya altura se puede aproximar por $z(x,y) = 1000 - \sqrt{x^2/2 + y^2/4}$ donde x, y, z vienen dados en metros. En un momento dado su posición viene dada por $x = 500$, $y = 300$.

1. ¿En qué dirección se tiene que mover para que la pendiente sea máxima?
2. Halla el plano tangente a z en el punto $(500, 300)$ y calcula aproximadamente qué altura gana cuando recorre 1 metro en esa dirección.

14. Distribución de temperaturas. La temperatura en un punto (x,y) de una lámina metálica es $T = 400e^{-(x^2+y)/2}$, para $x \geq 0,\ y \geq 0$.

1. Halla las direcciones de la placa, en el punto $(3,5)$, en las que no cambia la temperatura.
2. Calcula la dirección de máximo crecimiento de la temperatura en el punto $(3,5)$.

15. Temperatura aparente. Una medida de cómo siente una persona el calor lo da el índice de temperatura aparente, que admite como modelo

$$A = 0'885t - 22'4h + 1'20th - 0'544\,,$$

donde A es la temperatura aparente en ºC, t la temperatura del aire, y h la humedad relativa en forma decimal.

1. Halla $\frac{\partial A}{\partial t}$ y $\frac{\partial A}{\partial h}$ cuando $t = 30$ y $h = 0'80$.
2. ¿Qué influye más sobre A, la temperatura del aire o la humedad?