Matemáticas. Grado en Química
Ejercicios - Curso 2013-14 Hoja 1.7

Aproximacion de funciones. Desarrollos de Taylor.

1. La medida de la circunferncia de un círculo es $56\,cm$ con un posible error de $1,2\,cm$.
a) Aproxima el error y el porcentaje de error relativo al calcular el área del círuclo.
b) Estima qué porcentaje de error relativo podria cometerse como máximo en la medida de una circunferencia de un círculo si al calcular el área se quiere tener un error relativo inferior al $3\,\%$. ¿Cuál sería el error permitido para una circunferencia de $56\,cm$?

2. Determina el polinomio de Taylor de grado menor o igual que 5 centrado en $c = 0$ y en $c = 1$ de las siguientes funciones:

$$a) f_1(x) = \frac{1}{x+1}, \quad b) f_2(x) = \sqrt{x+3}, \quad c) f_3(x) = \ln(x+1), \quad d) f_4(x) = x^2 \cos(x).$$

Dibuja las gráficas de $f_i(x)$ y de $P_{5,c}(x)$ para x entre -2 y 2.

3. Halla una serie de potencias centrada en c para las funciones:

- a) $g_1(x) = \frac{3}{4-x}$ para $c = -2$.
- b) $g_2(x) = \frac{4x-7}{2x^2+3x-2}$ para $c = 0$.
- c) $g_3(x) = \frac{2}{1-x^2}$ para $c = -2$.
- d) $g_4(x) = \operatorname{sen}^2(x)$ para $c = 0$.

4. Halla una serie de Taylor centrada en c para las funciones:

- a) $h_1(x) = e^{-2x}$ para $c = 0$.
- b) $h_2(x) = \operatorname{sen}(x)$ para $c = \pi/4$.
- c) $h_3(x) = \ln(x^2+1)$ para $c = 0$.
- d) $h_4(x) = \tan(x)$ para $c = 0$ (primeros términos no nulos).

5.

1. Construir la serie de potencias centrada en 0 de la función $f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x^2}$.
2. Representar f y el polinomio de Taylor $P_{8,c}$ para $c = 0$.
3. Completar la tabla siguiente, donde

$$F(x) = \int_0^x \frac{\ln(t^2+1)}{t^2} dt \quad , \quad G(x) = \int_0^x P_{8,0}(t) dt \ .$$

x	0.25	0.50	0.75	1.00	1.50	2.00
F(x)						
G(x)						

4. Describir la relación entre las gráficas de f y de $P_{8,0}$ y los resultados de la tabla del apartado anterior.

6. Halla los siguientes límites desarrollando en serie de potencias algunas de las funciones que aparecen en las correspondientes expresiones

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{1-\cos x} \quad , \quad b)\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)\, x}{1-e^{-x^2}} \quad , \quad c)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{\ln(1+x^2)} \quad ,$$

$$d)\ \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1+x}+(x/2)\sqrt{1-x/2}}{\operatorname{sen}^2 x}$$

7. La función error (muy usada en estadística y probabilidad) está definida por la integral:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

Encuentra su desarrollo de Taylor.