Matemáticas. Grado en Química
Ejercicios - Curso 2013-14 Hoja 1.6

Integración y aplicaciones.

1. Para la función $f(x) = \int_1^{x^2} \frac{1}{1+\text{ sen } t}\, dt$, $t \geq 1$, calcula $f'(x)$ en $x = \sqrt{\pi}$.

2. Para la función $f(x) = \int_{e^{-x}}^{e^x} \frac{1}{\ln t}\, dt$, comprueba que $f'(x) = \frac{2 \text{ senh } x}{x}$.

3. Resuelve las siguientes integrales indefinidas haciendo cambios de variable:

$$a)\ \int \frac{\ln x}{x}\, dx\ , \qquad b)\ \int \sec^2 x\, e^{\tan x}\, dx\ , \qquad c)\ \int \frac{4x}{1-2x^2}\, dx$$

$$d)\ \int \sqrt{1-x^2}\, dx\ , \qquad e)\ \int \sqrt{1+x^2}\, dx\ , \qquad f)\ \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\, dx\, .$$

4. Resuelve las siguientes integrales indefinidas en las que intervienen funciones trigonométricas:

$$a)\ \int \text{sen}^3\ x\, dx\, , \qquad b)\ \int \text{sen}^4\ x\, dx\, , \qquad c) \int \sec x\, dx\, .$$

(Nota: para resolver c) multiplica y divide por $\sec x + \tan x$.)

5. Resuelve las siguientes integrales indefinidas mediante la técnica de integración por partes:

$$a) \int x^2\, e^{-x}\, dx\, , \qquad b)\ \int x \ln x\, dx \qquad c) \int \frac{x}{\cos^2 x}\, dx\, , \qquad d) \int e^x\ \cos x\, dx\, .$$

6. Resuelve las siguientes integrales de funciones racionales:

$$a)\ \int \frac{4x}{(1-2x^2)^2}\, dx \qquad b)\ \int \frac{1}{x^2-2x-15}\, dx\, ,$$

$$c)\ \int \frac{x^3-1}{x^2-x-2}\, dx \qquad d)\ \int \frac{1}{x^2+6x+10}\, dx\, .$$

7. Resuelve las integrales definidas:

$$a)\ \int_0^{\pi} e^{-x} \,\text{sen}\, x\, dx \quad , \quad b)\ \int_0^2 x\sqrt{2-x}\, dx \quad , \quad c)\ \int_e^{e^2} \frac{dx}{x(\ln x)^2} \quad ,$$

$$d)\ \int_0^3 f(x)\, dx \quad \text{donde} \quad f(x) = \begin{cases} 2x & ,\ x \leq 2 \\ x^2 & ,\ x > 2 \end{cases}$$

8. Resuelve la ecuación:

$$\int_0^x \frac{\text{sen}\, t}{\cos^2 t}\, dt = 1 \quad \text{para} \quad x > 0$$

9. Considera las siguientes integrales impropias y resuelve las que sean convergentes.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \quad , \quad \int_0^{\infty} x\, e^{-2x}\, dx \quad , \quad \int_{-1}^1 \ln|x|\, dx, \quad , \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$$

10. Calcula el área de la región comprendida entre las curvas dadas:
a) $y = (x-1)^2$ e $y = -x+2$
b) $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$ y el eje OX.
c) $y =$ sen x , $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ y el eje OX.
d) $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$ e $y = 4$. en el primer cuadrante.

11. Calcula el valor medio de cada una de las funciones dadas en el intervalo dado:
a) $f(x) = x^2 - 2$ en el intervalo $[0, 2]$.
b) $\operatorname{sen}^2 x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

12. Calcula el volumen del sólido que se obtiene rotando la curva o región dada alrededor del eje $0X$:
a) $y = \cos x$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$;
b) $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 4$;
c) $y = x^2$, $y = 4$.

13. Calcula la longitud del arco de curva dado entre los puntos indicados:
a) $y = x^{3/2}/3$ entre los puntos $x = 0$ y $x = 5$.
b) $y = 22,5(e^{x/150} + e^{-x/150})$ (catenaria) entre $x = -30$ y $x = 30$.

14. Halla el área de la superficie que se obtiene girando la curva dada alrededor del eje Ox :
a) $y = x^3/3$ en $[0, 3]$;
b) $y = \sqrt{x}$ en $[1, 4]$;
c) $y = x/2$ en $[0, 6]$.

15. Calcula el tiempo requerido para enfriar un objeto de 300ºF a 250ºF evaluando

$$t = \frac{10}{\ln 2} \int_{250}^{300} \frac{1}{T - 100} dT$$

donde t es el tiempo en minutos

16. Dos productos químicos A y B se combinan a razón de 3 a 1 para formar un compuesto. La cantidad x de compuesto producida en el instante t es proporcional a las cantidades que quedan sin transformar de A y B en la solución. Si se mezclan 3 Kg de A con 2 Kg de B, se tiene

$$\frac{dx}{dt} = k\left(3 - \frac{3x}{4}\right)\left(2 - \frac{x}{4}\right)$$

Si en 10 minutos se ha formado 1 Kg de compuesto, calcular la cantidad formada en 20 minutos.

17. Un peso de masa m está sujeto al extremo de un muelle que oscila con movimiento armónico simple. Según la ley de Hooke se tiene que

$$\int \frac{dy}{\sqrt{A^2 - y^2}} = \int \sqrt{\frac{k}{m}}\, dt$$

donde A es el desplazamiento máximo, t el tiempo y k una constante. Expresar y en función de t, supuesto $y = 0$ en $t = 0$.