Matemáticas. Grado en Química
Ejercicios - Curso 2013-14 Hoja 1.4

Derivadas.

1. Halla a y b de forma que la función:

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 & , \ x \leq 2 \\ x^2 + b & , \ x > 2 \end{cases}$$

sea derivable en todos los puntos.

2. Considera las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$$

Prueba que f es continua, pero no derivable en $x = 0$. Prueba que g es derivable en 0 y calcula $g'(0)$.

3. Calcula las derivadas de las siguientes funciones de x:

$$\sqrt{5x + 3x^3} \quad , \quad \frac{3x - 1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad , \quad \sqrt{x^2 + \sqrt{x + 1}} \quad , \quad \frac{x + e^{-x^2}}{\ln^2 x}$$

$$\cos\left(\pi x - \frac{2}{\sqrt{1 + x^2}}\right) \quad , \quad \operatorname{tg}\left(\frac{x}{x + 1}\right) \quad , \quad \frac{a + b \operatorname{sen} x^2}{\sqrt{x^4 + c^4}} \quad , \quad e^{x^2 - 2\cos x}$$

4. Calcula las siguientes derivadas, simplificando el resultado todo lo que puedas.

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad , \quad f(x) = \sqrt{\operatorname{sen}^3 x^2} \quad , \quad f(x) = \sqrt{(1 + \tan^2 x)\ \operatorname{sen} 2x}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{(1 - \operatorname{sen} 2x)\left(\frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}\right)^2} \quad , \quad f(x) = \ln \frac{x^3\ e^{-x^2}}{\tan^3 \frac{x}{3}}$$

$$f(x) = \frac{(x - 3)\,(x^2 + 1)\ \operatorname{sen} x}{(x^3 + 7) \tan^3 \sqrt{x}} \quad , \quad f(x) = 10^{x^3/(1-x)} \quad , \quad f(x) = \left(\frac{x^2\ \cos x^3}{x^3 - 1}\right)^{x^2}$$

5. Calcula la ecuación de la recta tangente a cada una de las siguientes curvas [1] en el punto propuesto:

a) La bruja de Agnesi: $(x^2 + 4)y = 8$ en el punto $(2, 1)$.
b) La cisoide: $(4 - x)y^2 = x^3$ en el punto $(2, 2)$.
c) El bifolium: $(x^2 + y^2)^2 = 4x^2 y$ en el punto $(1, 1)$.
d) El folium de Descartes: $x^3 + y^3 - 6xy = 0$ en el punto $(\frac{4}{3}, \frac{8}{3})$.

6. El gas de un globo esférico se escapa a razón de $1000\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{min}$ cuando el radio es de 25 cm. ¿Con qué rapidez disminuye el radio? ¿Y el área de la superficie?

[1] La representación gráfica de la curva la puedes ver en los ejercicios de la seccion 2.5 del libro de texto.

7. Halla la rapidez con la que cambia la distancia desde el origen a un punto que se mueve sobre la gráfica de la ecuación $y = x^2 + 1$ si dx/dt es 2 centímetros por segundo.

8. La arena sale de un contenedor a una velocidad de 10 metros cúbicos por minuto formando un montón en forma de cono. El diámetro de la base del cono es aproximadamente el triple de su altura. ¿A qué velocidad cambia la altura del montón cuanto éste tiene 5 metros?

9. Un avión vuela a una altura de 6 km y pasa directamente sobre una antena de radar. Cuando el avión está a 10 km del radar ($s = 10$), el radar detecta que la distancia s cambia a una velocidad de 240 kilómetros por hora. ¿Cual es la velocidad del avión?

10. Indica, razonadamente, si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

1. Si $f'(x) = g'(x)$, entonces $f(x) = g(x)$.
2. Si $f(x) = g(x) + c$, entonces $f'(x) = g'(x)$.
3. Si $y = \pi^2$, entonces $y' = 2\pi$.
4. Si $y = f(x)g(x)$, entonces $y' = f'(x)g'(x)$.
5. Si la velocidad de un objeto es constante, entonces su aceleración es 0.
6. Si $p(x) = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$, entonces $p^{(5)}(x) = 0$.