Matemáticas. Grado en Química
Ejercicios - Curso 2013-14 Hoja 1.3

Límites de funciones. Funciones continuas

1. Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3+x^2-x-1}\quad,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}\quad,\quad \lim_{x\to 16}\frac{4-\sqrt{x}}{x-16}\quad,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan^2(3x)}{2x^2}\quad,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}\quad,\quad \lim_{x\to \pi/4}\frac{1-\tan x}{\sin x-\cos x}\quad,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sec x-1}{x\sec x}\quad,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 4x}\quad .$$

2. Halla el límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

y utiliza este cálculo para obtener la aproximación $\cos x\sim 1-\frac{1}{2}x^2$. Utilizando la calculadora, estima el valor $\cos(0'1)$ con cuatro cifras decimales y compara con la aproximación anterior.

3. Halla las asíntotas verticales de cada una de las funciones dadas y esboza el comportamiento de su gráfica cerca de las asíntotas halladas:

$$a)\ f(x)=\frac{1}{x^2-25}\quad,\qquad b)\ g(x)=\frac{x^2+2x-3}{x^2+x-6}\quad .$$

4. Decide razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Para las que sean falsas muestra un ejemplo que pruebe que es falsa.

- Si $p(x)$ es un polinomio, la función $f(x)=\frac{p(x)}{x-4}$ tiene una asíntota vertical en $x=4$.
- Las funciones polinómicas no tienen asíntotas verticales.
- Si f tiene una asíntota vertical en $x=0$, entonces f no está definida en $x=0$.
- Las funciones trigonométricas no tienen asíntotas verticales

5. Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{3x-1}\quad,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^{10}-1}{10x^{11}-3}\quad,\quad \lim_{x\to\infty}(2x-\frac{1}{x^2})$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-x}}\quad,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x-\cos x}{x}\quad,\quad \lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+3})$$

6. Halla las asíntotas oblicuas de las siguientes funciones:

$$a)\ f(x)=\frac{2x^2-x}{x-1}\qquad b)\ g(x)=\frac{1+2x-2x^2}{2x}$$

7. Considera la función $f(x) = 2x - [x]$, donde $[x]$ denota la *parte entera de* x, es decir el mayor entero n tal que $n \leq x$. Calcula los límites laterales de $f(x)$ en $x = 2$ y en $x = -2$. Esboza la gráfica de esta función.

8. Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\ln(x+1)} \quad , \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad , \quad \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x \quad , \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x}\right) \quad ,$$

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/x} \quad , \quad \lim_{x\to\pi/2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sec x \quad , \quad \lim_{x\to 0} \operatorname{arc\,sen} x \cdot \operatorname{cotg} x$$

(Nota: para calcular estos límites tendrás que usar propiedades de las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas. Puedes hacer una gráfica de las funciones con algún programa para conjeturar cúal es el límite, pero luego debes probar tu conjetura.)

9. Halla los valores de las constantes a y b para que las funciones dadas sean continuas en toda la recta real:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \leq 2 \\ ax^2 & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} \frac{4\sin x}{x} & \text{si } x < 0 \\ b - 2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

10. Usando el teorema de los valores intermedios prueba que el polinomio $x^3 - 3x - 1$ tiene tres raices reales

11. Demuestra que la ecuación polinómica $x^3 + x - 1 = 0$ tiene una solución en el intervalo $[0, 1]$ y hallar una aproximación de esta solución con tres cifras decimales correctas.

12. Decide razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- Si $\lim_{x\to c} f(x) = L$ y $f(c) = L$, entonces f es continua en c.
- Para una función racional puede haber infinitos valores de x en los cuales no es continua.
- La función $f(x) = |x-1|(x-1)$ es continua en $(-\infty, \infty)$.
- La función $f(x) = |x-1|/(x-1)$ si $x \neq 1$ y $f(1) = 0$ es continua en $(-\infty, \infty)$.