

1. a) Si $x = (x_1, y_1, z_1)$, $y = (x_2, y_2, z_2)$ demostrar que

$$\langle x, y \rangle = 2x_1x_2 + x_2y_1 + x_1y_2 + 2y_1y_2 + z_1z_2$$

es un producto escalar en \mathbb{R}^3 y calcula la norma del vector $\vec{v} = (1, -1, -1)$ con este producto escalar.

b) Halla una base del subespacio vectorial W ortogonal, con el producto escalar del apartado a), al subespacio vectorial generado por $\vec{v} = (1, -1, -1)$.

REPASA: Producto escalar, Gram-Schmidt, complemento ortogonal

_____ x _____

2. a) En \mathbb{R}^3 con el producto escalar usual determina las ecuaciones de la proyección ortogonal sobre el subespacio generado por $(1, 1, 0)$ y $(0, 2, 1)$.

b) Sea $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación autoadjunta dada por

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Halla una base ortonormal de \mathbb{R}^3 (con el producto escalar usual) en la que la matriz de A sea diagonalizable

REPASA: Proyecciones, proyecciones ortogonales, aplicaciones autoadjuntas.

_____ x _____

3. Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación ortogonal que respecto a la base canónica tiene como matriz

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Demuestra qué tipo de transformación ortogonal es indicando sus elementos geométricos.

REPASA: Aplicaciones ortogonales, rotaciones y simetrías/reflexiones en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 .

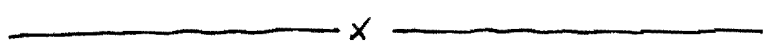
4. Reducir cada una de las formas cuadráticas siguientes

a) $A(x,x) = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$

b) $B(x,x) = 4x_2x_3 - 4x_1x_2$

$x = (x_1, x_2, x_3)$ a una forma canónica en una base ~~ortonormal~~ indicando el cambio de base y el índice de inercia positivo de cada una de ellas.

REPASA: Formas cuadráticas, completar cuadrados, índices de inercia, formas cuadráticas definidas, criterio de Sylvester.



5. En \mathbb{A}^3 con la estructura afín euclídea y con un sistema de referencia $R = \{0; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ considera el sistema de referencia $R' = \{P; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$, donde $P = (1, -1, 1)_R$, $\vec{u}_1 = 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3$, $\vec{u}_2 = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$, $\vec{u}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$.

a) Halla las coordenadas de los puntos $P_1 = (1, 0, 1)_R$ y $Q_1 = (2, 3, 2)_R$ con respecto a R'

b) Halla la ecuación implícita en el sistema de referencia R de la variedad lineal que pasa por los puntos P_1, Q_1 y $R_1 = (0, 0, 1)$

c) Halla la ecuación implícita de la variedad lineal L del apartado b) con respecto al sistema de referencia R' .

REPASA: Espacio afín, variedades lineales, sistemas de referencia, ecuaciones de variedades lineales



6. Considera en \mathbb{A}^4 los planos con ecuaciones implícitas

$\pi_1: \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$, $\pi_2: \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 2 \end{cases}$, $\pi_3: \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

Estudia la posición relativa de π_1 y π_3 y de π_2 y π_3 , y calcula las dimensiones de $\pi_1 + \pi_2$ y $\pi_2 + \pi_3$

REPASO: Posición relativa de variedades lineales,

7. a) Demuestra que los puntos $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, 1, 1)$, $C = (1, 3, 1)$ y $D = (1, 1, 2)$ son afinmente independientes en \mathbb{A}^3 .

b) Halla las coordenadas baricéntricas del punto $X = (0, 0, 0)$ con respecto al sistema de referencia $\mathcal{R}_b = \{A, B, C, D\}$ en \mathbb{A}^3

REPASA: Puntos afinmente independientes y dependientes, referencias baricéntricas, cambio de referencias baricéntricas

_____ x _____

REPASA: Definición y propiedades de aplicaciones afines

_____ x _____

8. a) Halla la distancia en \mathbb{R}^3 entre las rectas

$$r_1 = (1, 1, 0) + t(0, 1, 1) \quad \text{y} \quad r_2 = (0, 0, -2) + s(1, -1, 0)$$

b) Halla la distancia del punto $P = (3, 2, -1)$ a la recta r_1 .

REPASA: Distancia entre variedades lineales

_____ x _____

9. a) Halla las ecuaciones de la simetra en el plano con respecto a la recta $x + y = 3$

b) En el espacio afin euclideo \mathbb{R}^3 clasifica el movimiento M dado por

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

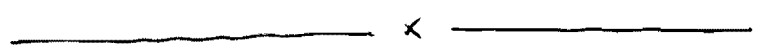
Indicando sus elementos geométricos

REPASA: Tipos de movimientos en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 , clasificación de los movimientos en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3

_____ x _____

10. Escribe la ecuación de la elipse con un vértice en (0,0), uno de sus focos en (2,1) y excentricidad $\frac{1}{2}$.

REPASA: Definiciones de las secciones cónicas y sus ecuaciones.



11a) Reduce a su forma canónica la cónica de ecuación

$$4xy + 2x + 1 = 0$$

indicando qué tipo de cónica es.

b) De los elementos siguientes, calcula aquellos que posee la cónica y dibújala: centro, vértices, ejes.

REPASA: Clasificación de las cónicas y obtención de sus elementos geométricos



12. a) Reduce a su forma canónica la superficie de segundo grado

$$2xy + 2z^2 - \sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 0$$

indicando qué tipo de superficie es.

b) De los elementos siguientes, calcula aquellos que posee la cuádrica: centro, vértices, ejes.

REPASA: Clasificación de las cuádricas y obtención de sus elementos geométricos

