1. a) Si $x=(x_1,y_1,z_1)$, $y=(x_2,y_2,z_2)$ demostrar que

$$\langle x,y\rangle = 2x_1x_2 + x_2y_1 + x_1y_2 + 2y_1y_2 + z_1z_2$$

es un producto escalar en $\mathbb{R}^3$ y calcula la norma del vector $\vec{v}=(1,-1,-1)$ con este producto escalar.

b) Halla una base del subespacio vectorial W ortogonal, con el producto escalar del apartado a), al subespacio vectorial generado por $\vec{v}=(1,-1,-1)$.

REPASA: Producto escalar, Gram-Schmidt, complemento ortogonal

———— x ————

2. a) En $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual determina las ecuaciones de la proyección ortogonal sobre el subespacio generado por $(1,1,0)$ y $(0,2,1)$.

b) Sea $A:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación autoadjunta dada por

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Halla una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ (con el producto escalar usual) en la que la matriz de A sea diagonalizable

REPASA: Proyecciones, proyecciones ortogonales, aplicaciones autoadjuntas.

———— x ————

3. Sea $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación ortogonal que respecto a la base canónica tiene como matriz

$$A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&-2&2\\-2&-1&-2\\2&-2&-1\end{pmatrix}.$$

Decir qué tipo de transformación ortogonal es indicando sus elementos geométricos.

REPASA: Aplicaciones ortogonales, rotaciones y simetrías/reflexiones en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

4. Reducir cada una de las formas cuadráticas siguientes

a) $A(x,x) = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$

b) $B(x,x) = 4x_2x_3 - 4x_1x_2$

$x = (x_1, x_2, x_3)$ a una forma canónica en una base ~~[illegible]~~ indicando el cambio de base y el índice de inercia positivo de cada una de ellas.

REPASA: Formas cuadráticas, completar cuadrados, índices de inercia, formas cuadráticas definidas, criterio de Sylvester.

—————— x ——————

5. En $\mathbb{A}^3$ con la estructura afín euclídea y con un sistema de referencia $R = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ considera el sistema de referencia $R' = \{P; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$, donde $P = (1,-1,1)_R$, $\vec{u}_1 = 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3$, $\vec{u}_2 = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$, $\vec{u}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$.

a) Halla las coordenadas de los puntos $P_1 = (1,0,1)_R$ y $Q_1 = (2,3,2)_R$ con respecto a R'

b) Halla la~~s~~ ecuación implícita en el sistema de referencia R de la variedad lineal L que pasa por los puntos P_1, Q_1 y $R_1 = (0,0,1)$

c) Halla la ecuación implícita de la variedad lineal L del apartado b) con respecto al sistema de referencia R'.

REPASA: Espacio afín, variedades lineales, sistemas de referencia, ecuaciones de variedades lineales

—————— x ——————

6. Considera en $\mathbb{A}^4$ los planos con ecuaciones implícitas

$$\pi_1 : \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}, \quad \pi_2 : \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 2 \end{cases}, \quad \pi_3 : \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Estudia la posición relativa de π_1 y π_3 y de π_2 y π_3, y calcula las dimensiones de $\pi_1 + \pi_2$ y $\pi_2 + \pi_3$

REPASO: Posición relativa de variedades lineales,

7. a) Demuestra que los puntos $A=(1,1,1)$, $B=(2,1,1)$, $C=(1,3,1)$ y $D=(1,1,2)$ son afínmente independientes en $\mathbb{A}^3$.

b) Halla las coordenadas baricéntricas del punto $X=(0,0,0)$ con respecto al sistema de referencia $\mathcal{R}_b=\{A,B,C,D\}$ en $\mathbb{A}^3$

REPASA: Puntos afínmente independientes y dependientes, referencias baricéntricas, cambio de referencias baricéntricas

——————— x ———————

REPASA: Definición y propiedades de aplicaciones afines

——————— x ———————

8. a) Halla la distancia en $\mathbb{R}^3$ entre las rectas

$$r_1=(1,1,0)+t(0,1,1) \quad \text{y} \quad r_2=(0,0,-2)+s(1,-1,0)$$

b) Halla la distancia del punto $P=(3,2,-1)$ a la recta r_1.

REPASA: Distancia entre variedades lineales

——————— x ———————

9. a) Halla las ecuaciones de la simetría en el plano con respecto a la recta $x+y=3$

b) En el espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^3$ clasifica el movimiento M dado por

$$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

indicando sus elementos geométricos

REPASA: Tipos de movimientos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, clasificación de los movimientos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

——————— x ———————

10. Escribe la ecuación de la elipse con un vértice en $(0,0)$, uno de sus focos en $(2,1)$ y excentricidad $\frac{1}{2}$.

REPASA: Definiciones de las secciones cónicas y sus ecuaciones.

——————— x ———————

11 a) Reduce a su forma canónica la cónica de ecuación

$$4xy + 2x + 1 = 0$$

indicando qué tipo de cónica es.

b) De los elementos siguientes, calcula aquellos que posee la cónica y dibújala: centro, vértices, ejes.

REPASA: Clasificación de las cónicas y obtención de sus elementos geométricos

——————— x ———————

12. a) Reduce a su forma canónica la superficie de segundo grado

$$2xy + 2z^2 - \sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 0$$

indicando qué tipo de superficie es.

b) De los elementos siguientes, calcula aquellos que posee la cuádrica: centro, vértices, ejes.

REPASA: Clasificación de las cuádricas y obtención de sus elementos geométricos

——————— x ———————