1. FACTORIZACIÓN QR DE UNA MATRIZ

Sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$$

tal que rango$(A)=n$, es decir, los vectores columna

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

son linealmente independientes en $\mathbb{R}^m$. Apliquemos Gram-Schmidt a los vectores $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ para obtener vectores ortonormales $\{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_n\}$.

Recordamos:

Para $k=1$, $\quad \vec{q}_1 = \frac{1}{\nu_1}\vec{a}_1 \quad$ con $\quad \nu_1 = \|\vec{a}_1\| \qquad (1.1)$

Para $k=2$,

$$\vec{q}_2 = \frac{1}{\nu_2}\left(\vec{a}_2 - \langle \vec{q}_1, \vec{a}_2\rangle \vec{q}_1\right) \quad \text{con} \quad \nu_2 = \|\vec{a}_2 - \langle \vec{q}_1, \vec{a}_2\rangle \vec{q}_1\| \qquad (2)$$

Una vez calculados $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_{k-1}$

$$\vec{q}_k = \frac{1}{\nu_k}\left(\vec{a}_k - \langle \vec{q}_1, \vec{a}_k\rangle \vec{q}_1 - \langle \vec{q}_2, \vec{a}_k\rangle \vec{q}_2 - \dots - \langle \vec{q}_{k-1}, \vec{a}_k\rangle \vec{q}_{k-1}\right)$$

con

$$\nu_k = \|\vec{a}_k - \langle \vec{q}_1, \vec{a}_k\rangle \vec{q}_1 - \langle \vec{q}_2, \vec{a}_k\rangle \vec{q}_2 - \dots - \langle \vec{q}_{k-1}, \vec{a}_k\rangle \vec{q}_{k-1}\| \qquad (1.3)$$

Los cálculos (1), (2), ..., (3) pueden escribirse como sigue:

$$\left.\begin{aligned} \vec{a}_1 &= \nu_1 \vec{q}_1 \\ \vec{a}_2 &= \langle \vec{q}_1, \vec{a}_2\rangle \vec{q}_1 + \nu_2 \vec{q}_2 \\ &\vdots \\ \vec{a}_k &= \langle \vec{q}_1, \vec{a}_k\rangle \vec{q}_1 + \langle \vec{q}_2, \vec{a}_k\rangle \vec{q}_2 + \dots + \langle \vec{q}_{k-1}, \vec{a}_k\rangle \vec{q}_{k-1} + \nu_k \vec{q}_k \end{aligned}\right\} (1.4)$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

Ahora reescribimos (4) con matrices:

$$A = [\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_n] \begin{bmatrix} \nu_1 & \langle \vec{q}_1, \vec{a}_2 \rangle & \langle \vec{q}_1, \vec{a}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{q}_1, \vec{a}_n \rangle \\ 0 & \nu_2 & \langle \vec{q}_2, \vec{a}_3 \rangle & \cdots & \langle \vec{q}_2, \vec{a}_n \rangle \\ 0 & 0 & \nu_3 & \cdots & \langle \vec{q}_3, \vec{a}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \nu_n \end{bmatrix}$$

$$= QR \qquad (1.5)$$

donde $Q = [\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_n]$ es la matriz cuyos vectores columna son las coordenadas de $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_n$ y R es una matriz triangular superior (Right triangular) cuyos elementos de la diagonal son no nulos

La matriz Q es ortogonal (es decir, $Q^T Q = I_n$) y de tamaño $m \times n$.

EJEMPLO 1A. Hallar la factorización QR de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

S/

$$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & \sqrt{2}/2\sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{2}/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & \sqrt{2}/2\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3}/\sqrt{2} \end{bmatrix} \equiv QR$$

LAB 1A. Hacer el ejemplo A con SAGE y poner ejemplos de matrices de mayor tamaño.